UNIVERSIDADE REGIONAL INTEGRADA DO ALTO URUGUAI E DAS MISSÕES
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, EXTENSÃO E PÓS-GRADUAÇÃO
CÂMPUS DE FREDERICO WESTPHALEN
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

CECILIA ROMITTI BONDAN

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: PROVOCAÇÕES ENTRE O ENSINO DE ÁLGEBRA E O PROTAGONISMO ESTUDANTIL

FREDERICO WESTPHALEN
2023

CECILIA ROMITTI BONDAN

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: PROVOCAÇÕES ENTRE O ENSINO DE ÁLGEBRA E O PROTAGONISMO ESTUDANTIL

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, pelo Programa de Pós-graduação em Educação – Mestrado em Educação, da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI, Campus de Frederico Westphalen.

Orientação: Profa. Dra. Luci T. M. dos Santos Bernardi

FREDERICO WESTPHALEN/RS

2023

CECILIA ROMITTI BONDAN

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: PROVOCAÇÕES ENTRE O ENSINO DE ÁLGEBRA E O PROTAGONISMO ESTUDANTIL

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, pelo Programa de Pós-graduação em Educação – Mestrado em Educação, da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI, Campus de Frederico Westphalen.

Frederico Westphalen, 13 de novembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Luci T. M. dos Santos Bernardi (Orientadora)
Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI/FW)

____

Profa. Dra. Denise Knorst da Silva
Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) - Câmpus Erechim

____

Profa. Dra. Laísa Veroneze Bisol
Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI/FW)

IDENTIFICAÇÃO

Instituição de Ensino e Unidade:

Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões;

URI/Câmpus de Frederico Westphalen/RS;

Rua Assis Brasil, n. 709, Bairro Itapagé, Frederico Westphalen/RS – CEP: 98400-000.

Direção do Câmpus:

Diretora Geral: Profa. Dra. Elisabete Cerutti;

Diretora Acadêmica: Prof. Dr. Carlos Eduardo Blanco Linares;

Diretor Administrativo: Prof. Dr. Alzenir José de Vargas.

Chefia de Departamento e Coordenação de Programa:

Departamento de Ciências Humanas: Profa. Ma. Maria Cristina Gubiani Aita;

Programa de Pós-Graduação em Educação: Profa. Dra. Luci Mary Duso Pacheco.

Disciplina:

Dissertação de Mestrado.

Orientadora:

Profa. Dra. Lucí Teresinha Marchiori dos Santos Bernardi.

Mestranda:

Cecilia Romitti Bondan.

Linha de Pesquisa:

Formação de Professores, Saberes e Práticas Educativas.

Dedico esta pesquisa à minha família, meu alicerce incondicional durante toda essa caminhada; ao meu esposo Maurício, e aos meus filhos Brenda e Gabriel, que, por vezes, ficaram em segundo plano para que eu pudesse concluir mais este desafio em minha jornada. Também dedico essa dissertação aos meus pais, *in memoriam*, Vitório e Elsa, pilares da minha formação como ser humano. Minha irmã Maria, que sempre esteve ao meu lado, apoiando-me e dando suporte aos meus filhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu esposo Maurício e aos meus filhos Brenda e Gabriel, pelas palavras de incentivo e ânimo ao longo dessa caminhada.

À minha irmã Maria, sua presença, conversas e auxílio foram meu suporte, tornaram tudo mais leve e permitiram que eu continuasse. Obrigada!

Gratidão à minha orientadora, Profa. Dra. Lucí dos Santos Bernardi, que me instigou a ser a melhor versão de mim, do início ao fim desse processo, por ter aceitado e me acompanhado nesta pesquisa. O seu empenho foi essencial para a minha motivação à medida que as dificuldades iam surgindo ao longo do percurso.

Aos colegas de escola, por entenderem esse momento, pelas conversas, por me ouvirem, pelas sugestões, pela compreensão.

À Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – Câmpus de Frederico Westphalen, à direção, à coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação, professores e funcionárias, pela acolhida, atenção e dedicação.

Aos membros da banca avaliadora, pela leitura atenciosa, comentários, contribuições e sugestões para o desenvolvimento e finalização deste estudo.

O meu carinho e agradecimento aos estudantes que contribuíram e aceitaram o convite para fazerem parte deste trabalho.

Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender.

(Freire, 1997).

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo analisar como os estudantes do Ensino Fundamental estruturam a exploração, as conjecturas e a justificação ao participarem de uma atividade de Investigação Matemática que tematiza a Álgebra por meio de padrões e regularidades. Para atingir o que foi proposto neste estudo, elegeu-se a metodologia qualitativa, posto que se preocupa com uma realidade de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, correspondendo a um universo mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos, que não pode ser quantificada, um lado não perceptível e/ou captável em equações, aprofunda-se no mundo dos significados, das ações e das relações humanas, que não podem ser reduzidas a operacionalização de variáveis A investigação, de cunho exploratório e descritivo, teve âncora teórica nos pressupostos da Investigação Matemática e na Educação Matemática Critica. Realizou-se um estudo de campo, com estudantes do Ensino Fundamental de uma Escola Pública Estadual, situada no Noroeste do estado do Rio Grande do Sul, turma de 7º ano. As atividades desenvolveram-se em quatro encontros, com duração de duas horas cada. Foram propostas atividades que contemplavam Ambientes de Aprendizagem em três Cenários para Investigação: referência à Matemática pura; referência à semirrealidade e referência à realidade. A dinâmica de trabalho foi diversificada, uma vez que, para cada Cenário Investigativo, foram propostas experiências variadas. O professor, nesse contexto, atuou como mediador, sem indicar modelos prontos. Os dados coletados foram utilizados de forma descritiva e qualitativa, procurando reconhecer questões da Investigação Matemática. Desenvolveu-se uma análise transversal, a partir das categorias emergentes da ATD: Aceitando o convite à Exploração: primeiras provocações e Postura Investigativa. Na sequência, as relações dessas categorias com a qualidade do diálogo estabelecido, defendendo, então, que a Cooperação Investigativa mobiliza o Protagonismo dos Estudantes. Os estudantes, por meio das atividades investigativas, foram desafiados a uma outra postura diante de sua aprendizagem. A proposta de trabalho foi construída de maneira a oportunizar aos estudantes a compreensão de padrões, relações, funções, representação e análise de situações matemáticas e estruturas, experiências de aprendizagem diversificadas e significativas, dando ênfase ao desenvolvimento do pensamento algébrico e não à prática repetitiva. Os resultados apontaram que as aulas de investigação proporcionaram aos estudantes interesse e entusiasmo pelas atividades e pelo conteúdo em si, sem ser algo penoso e obrigatório, sendo eles protagonistas do seu aprendizado.

Palavras-chave: Investigação Matemática; Atividade investigativa; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This study aimed to analyze how Elementary School students structure exploration, conjectures and justification when participating in a Mathematical Investigation activity that presents Algebra through patterns and regularities. To achieve what was proposed in this study, the qualitative methodology was chosen, since it is concerned with a reality of meanings, motives, aspirations, beliefs, values and attitudes, corresponding to a deeper universe of relationships, processes and phenomena, which cannot be quantified, a side not perceptible and/or graspable in equations, deepens in the world of meanings, actions and human relationships, which cannot be reduced to the operationalization of variables. The investigation, exploratory and descriptive in nature, had as theories the assumptions of Mathematical Investigation and Critical Mathematics Education. A field study was conducted with elementary school students from a state public school, located in the northwest of the state of Rio Grande do Sul. The activities were developed in four meetings, each lasting two hours. The activities proposed contemplated Learning Environments in three Scenarios for Investigation: reference to pure mathematics; reference to semi-reality and reference to reality. The work dynamics was diverse, since, for each Investigative Scenario, varied experiences were proposed. The teacher, in this context, acted as a mediator, without indicating ready-made models. The data collected were used in a descriptive and qualitative way, seeking to recognize questions of Mathematical Investigation. A cross-sectional analysis was developed, based on the emerging categories of DTA: Accepting the invitation to Explore: first provocations and Investigative Posture. Subsequently, the relationships of these categories with the quality of the dialogues established, defending, then, that the Investigative Cooperation mobilizes the Protagonism of the Students. The students, through the investigative activities, were challenged to a different attitude towards their learning. The work proposal was built in order to provide students with the understanding of patterns, relationships, functions, representation and analysis of mathematical situations and structures, diverse and meaningful learning experiences, emphasizing the development of algebraic thinking and not repetitive practice. The results showed that investigation classes provided students with interest and enthusiasm for the activities and the content itself, without being something painful and mandatory, making them protagonists of their learning process.

Keywords: Mathematical Investigation; Investigative activity; Elementary School.

LISTAS DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AEE	Atendimento Educacional Especializado
ATD	Análise Textual Discursiva
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CI	Modelo de Cooperação Investigativa
CNS	Conselho Nacional de Saúde
FUVATES	Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social
FW	Frederico Westphalen
GPPE	Grupo de Pesquisa Processos Educativos
IES	Instituições de Ensino Superior
IMC	Índice de Massa Corporal
JERGS	Jogos Escolares do Rio Grande do Sul
MEC	Ministério da Educação
OBA	Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronomia e Astronáutica
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
Pç	Peça
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPGEDU	Programa de Pós-Graduação em Educação
RS	Rio Grande do Sul
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SAERS	Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul
SEF	Secretaria de Educação Fundamental
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TRI	Avaliação e Monitoramento da Educação do Rio Grande do Sul - Avaliar é TRI
UNOPAR	Universidade Norte do Paraná
URI	Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação – Mestrado em Educação (PPGEDU), vincula-se à Linha de Pesquisa Formação de Professores, Saberes e Práticas Educativas e integra o projeto Práticas Educativas no Contexto da Educação Matemática Crítica, do Grupo de Pesquisa Processos Educativos: Formação de Professores, Saberes e Práticas (GPPE).

O estudo coloca em tela os processos educativos na perspectiva da Investigação Matemática, com foco no ensino da Álgebra. Traz em seu bojo "provocações", no sentido de desafiar o estudante à uma outra postura diante de sua aprendizagem, especialmente no campo da Álgebra.

É importante considerarmos que o ensino, no Brasil, sobretudo na disciplina de Matemática, ainda predomina de forma tecnicista. A Matemática desenvolvida na escola e a aplicada ao cotidiano possuem abordagens distintas. Na escola, a aula é desenvolvida com formalismo, com a complexidade de cálculos, regras, memorização de fórmulas, levando à exaustão da disciplina. É vista como uma matéria enjoada, difícil de ensinar e difícil de aprender, considerada de profunda dificuldade, os estudantes acabam tendo resistência a aprende-la. Precisamos rever estas situações, pensar o ensino da Matemática a partir de Ambientes de Aprendizagem que possibilitem aos estudantes provocar associações do cotidiano com o conteúdo estudado, em uma perspectiva investigativa que mobilize a busca de outras opções de respostas e indagações observadas no mundo real.

Nesse viés, observando alguns documentos oficiais que determinam/ram os caminhos na educação brasileira, destacamos os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (Brasil, 1997a), que trazem como objetivo principal orientar os educadores quanto às diretrizes correspondentes a cada disciplina. Os PCNs para a área de Matemática no Ensino Fundamental inferem que ela é relevante na formação da cidadania, é construção e apropriação de conhecimento que auxiliará no entendimento da realidade, assim como na transformação dela. O processo de ensino e aprendizagem de Matemática somente acontece efetivamente quando o docente conseguir relacionar observações do mundo real com representações e estas com princípios e conceitos matemáticos (Brasil, 1997b).

O documento defende, ainda, que a aprendizagem em Matemática está interligada à compreensão, à assimilação do significado, o que pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos. Portanto, o significado da Matemática se dá, para o estudante, quando conseguir realizar conexões (com as demais disciplinas e com o cotidiano). Face a isso, a seleção e a organização dos conteúdos da disciplina devem ocorrer conforme sua relevância social e a contribuição que trazem para o desenvolvimento intelectual do estudante, ou seja, é preciso estar em permanente construção. Outrossim, reforçam que os recursos didáticos têm um papel essencial no processo de ensino e aprendizagem, desde que integrados às situações matemáticas que levem à reflexão (Brasil, 1997b).

Outro documento importante e orientador, quando se trata do ensino da Matemática, é a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017), documento que estabelece os conteúdos e competências que devem ser desenvolvidos pelos estudantes em cada etapa da Educação Básica no Brasil. A Matemática, na BNCC, tem como pressuposto pedagógico a ideia de que todos podem aprendê-la. Assim, propõe o desenvolvimento de competências e habilidades que propiciem ao estudante perceber a importância dessa área na vida pessoal, social e ampliar as formas de pensar matematicamente para muito além dos cálculos numéricos.

No que diz respeito ao ensino da Matemática, a BNCC (2017) tem como objetivos principais: 1. Promover o desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento matemático dos alunos, estimulando seu interesse pela disciplina; 2. Proporcionar a compreensão e o domínio de conceitos matemáticos, bem como a capacidade de aplicá-los em situações reais e problemas do cotidiano; 3. Desenvolver a habilidade de utilizar a Matemática como uma ferramenta para resolver problemas, tomar decisões e interpretar informações quantitativas; 4. Estimular a capacidade de investigação e de resolução de problemas, através do uso de métodos, estratégias e recursos matemáticos adequados; 5. Desenvolver a capacidade de comunicação matemática, através da leitura, escrita e interpretação de textos, gráficos e representações matemáticas; 6. Promover a autonomia dos alunos em relação ao seu próprio aprendizado matemático, estimulando a reflexão sobre as estratégias utilizadas, a identificação de erros e a busca de soluções; 7. Valorizar a Matemática como uma ciência fundamental para a compreensão do mundo e das diversas áreas do conhecimento.

Esses são alguns dos objetivos principais propostos para o ensino da Matemática. Tais metas realçam a pertinência de desenvolver a capacidade de raciocínio lógico, a aplicação de conceitos matemáticos na vida real, a resolução de problemas, a comunicação matemática e a autonomia dos alunos no processo de aprendizado (Brasil, 2017).

Frente a tantas responsabilidades, precisamos utilizar metodologias apoiadas em recursos didáticos que instigam o estudante, cada vez mais, a ser dono do seu próprio saber, para uma Educação Matemática emancipadora e crítica. Nesse debate sobre os processos de ensino, os matemáticos Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) destacam a prática matemática, buscando a identificação e resolução de problemas de maneira investigativa, os segmentos professores e estudantes precisam também estar envolvidos, poderão ter diferentes postulados, perfazendo caminhos distintos, fazendo-se necessário uma avaliação de seu desempenho, contribuindo para um aprendizado significativo.

O professor tem papel fundamental, fazendo confrontos, comparações e análise dos resultados, com autonomia, para que o estudante busque se desenvolver com propriedade, contribuindo com a Ciência e a Matemática, suprindo as expectativas das demandas sociais contemporâneas.

Braumann (2002, p. 5) enfatiza, de maneira semelhante, que:

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detetivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informações sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar fazendo erros e aprendendo com eles.

A disciplina de Matemática sempre foi considerada complexa e a Álgebra se sobressai. Para Zegarelli (2016, p. 133), "a Álgebra permite que você resolva problemas que são muito difíceis quando se utiliza apenas a aritmética. Na Álgebra, você começa estudar as variáveis (como o x)". A utilização da linguagem algébrica exige acentuado grau de abstração. Ao invés de manipulação simbólica, o grande objetivo é desenvolver o pensamento algébrico, pois aprender Álgebra implica na capacidade de "[...] pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Resumir a atividade algébrica à manipulação simbólica equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas a uma das suas facetas" (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 10).

Desse modo, a partir do cenário apresentado e com foco no cotidiano da escola, o problema de pesquisa proposto assim se configurou: **como os estudantes do Ensino Fundamental estruturam a exploração, as conjecturas e a justificação ao participarem de uma atividade de Investigação Matemática que tematiza a Álgebra por meio de padrões e regularidades?**

Para responder ao problema de pesquisa, consideramos ser essencial compreender acerca da Investigação Matemática no Ensino Fundamental, identificando as possibilidades que esta prática proporciona na aprendizagem dos conceitos matemáticos, atentando às contribuições que o ensino de Matemática pode oportunizar aos professores que desejam fazer uso de atividades investigativas no ensino e aprendizagem dessa disciplina. Nessa linha, o objetivo geral desta pesquisa consistiu em **analisar como os estudantes estruturam a exploração, as conjecturas e a justificação ao participarem de uma atividade de Investigação Matemática que tematiza a Álgebra por meio de padrões e regularidades.**

De acordo com o objetivo geral, traçamos os seguintes objetivos específicos: identificar os principais conceitos e princípios que ancoram a Investigação Matemática no campo teórico; aprofundar conceitos estruturantes da Álgebra e do pensamento algébrico; propor a estruturação de uma aula dedicada à realização do trabalho investigativo em Matemática para ensino de Álgebra e desenvolvimento do pensamento algébrico; constatar que discussões matemáticas os estudantes promovem e como elas ocorrem no desenvolvimento das atividades de investigação propostas em termos de exploração, conjecturas, teses e justificação; observar que conhecimentos, capacidades matemáticas, novas concepções e atitudes em relação à Matemática são evidenciados pelos estudantes; detectar quais as possibilidades e limitações da proposta apresentada.

Para tanto, a pesquisa desenvolveu atividades de campo com estudantes do Ensino Fundamental, trazendo a intencionalidade através de uma proposta de trabalho que teve âncora nos seguintes pressupostos: a) as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser trazidas para a sala de aula e todos os estudantes podem produzir Matemática nas suas diferentes expressões (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009); b) a realização de uma Investigação Matemática envolve quatro momentos principais: o primeiro momento envolve o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões, o segundo refere-se ao processo de formulação de conjecturas, o terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas, e, finalmente, o último diz respeito à argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009); c) três elementos fundamentais de unidades de ensino de cunho exploratório: a conjetura de ensino e aprendizagem que preside à elaboração da unidade, as tarefas que a compõem e os modos de trabalho, estilos de comunicação e papéis de professor e alunos (Ponte *et al*., 2013).

A partir de tais pressupostos, a proposta de trabalho foi construída de maneira a oportunizar aos estudantes a compreensão de padrões, relações, funções, representação e análise de situações matemáticas e estruturas, experiências de aprendizagem diversificadas e significativas, tendo em vista as suas capacidades de representar relações simbolicamente, compreender e trabalhar com expressões algébricas e resolver problemas, dando ênfase ao desenvolvimento do pensamento algébrico e não à prática repetitiva de procedimentos algébricos.

Ademais, acerca da organização textual deste trabalho, está disposto em sete seções. A **Introdução**, como a seção 1, que aqui se desenvolve. A seção 2, em que apresentamos **O Contexto da Pesquisa*,*** versando sobre a trajetória de vida, acadêmica e profissional da mestranda, depois, trazemos o Estado do Conhecimento sobre o tema.

Na sequência, em **A Investigação Matemática em Sala de Aula**, conceituamos e discutimos a Investigação Matemática, analisando as possibilidades de mobilizá-la nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Em **Os caminhos da Pesquisa,** a seção 3, dissertamos a respeito da metodologia da pesquisa, apresentando os sujeitos, a descrição da organização dos dados coletados e a análise realizada a partir da Análise Textual Discursiva.

Na seção 4, **Álgebra: Elementos para uma proposta** particularizamos a conceituação de Álgebra e a intencionalidade da sua oferta a partir da Base Nacional Comum Curricular, apresentando propostas de atividades concernentes a como desenvolver a Investigação Matemática em sala de aula. Na seção seguinte, **Episódios Investigativos: Um diálogo com os estudantes**, descrevemos as atividades investigativas desenvolvidas.

Já a secção 6, **Movimento Investigativo**, apresentamos uma análise transversal a partir das categorias emergentes da Análise Textual Discursiva (ATD): “Aceitando o convite à Exploração: primeiras provocações” e “Postura Investigativa”. Na sequência, as relações dessas categorias com a qualidade do diálogo estabelecido, argumentando que “a Cooperação Investigativa mobiliza o Protagonismo dos Estudantes”. E, por fim, a última seção corresponde às **Considerações Finais**, na qual retomamos os objetivos relacionando-os com as nossas constatações e observações finais.

1 O CONTEXTO DA PESQUISA

No contexto desta pesquisa, entendemos ser pertinente, incialmente, apresentarmos elementos mobilizadores para a construção do estudo, denotando a trajetória de vida, acadêmica e profissional da mestranda e a sua relação com campo da educação. Para que os leitores compreendam o caminho percorrido ao longo deste estudo, narramos fatos que impulsionaram a buscar novos aprendizados e experiências, até o início do Mestrado em Educação.

Nessa toada, pensando em questões educacionais, lembramos que a educação é um direito de todos e visa o pleno desenvolvimento do ser humano, de suas potencialidades, habilidades e competências, por meio do processo de ensino e aprendizagem. Optamos, portanto, em considerar a prática da pesquisa matemática e sua contribuição para a aprendizagem significativa como objeto de pesquisa mobilizadora, especialmente no campo da Álgebra. E, para fazer o desenho dela, buscamos conhecer e compreender o que se tem produzido acerca do tema nas pesquisas brasileiras. Nesta intenção, construímos o Estado do Conhecimento, com o intuito de mapear e analisar dissertações e teses referentes à temática, que também apresentamos nesta seção.

1.1 As memórias que desenham o cenário da pesquisa

Ser professor (a), atualmente, é um desafio diário. A falta de valorização do poder público é notória, visto que não há mais procura em frequentar os cursos de Licenciaturas. Nesse campo, os bancos universitários estão cada vez mais vazios, as escolas refletem essa difícil realidade, pois a falta de profissionais é constante nas instituições de ensino.

Existem muitos fatores que influenciam na nossa prática profissional; ela exige responsabilidade e comprometimento e espera-se que o professor tenha compromisso político e social, contribuindo com a formação dos cidadãos e na melhoria da sociedade. O docente trabalha com o conhecimento, tem o compromisso de transformar conhecimentos em aprendizagens significativas com os estudantes. Nessa jornada, é preciso que o professor continue se apropriando de saberes, ele não tem, unicamente, a tarefa de ensinar, precisa continuar aprendendo para ensinar. O professor deve ser um profissional crítico.

Meu desejo de ser professora foi despertado ainda na primeira série do Ensino Fundamental, a "culpada" disto foi a professora que, com o maior gosto e jeito de ensinar, fazia os barulhinhos da abelhinha no traçado das letras. Sim, fui alfabetizada com o método da abelhinha. Deu certo. Quando se faz com amor, o aprendizado é sutil, leve e agregando significados. Com o passar dos anos, o desejo de ser professora aumentava, a porta do roupeiro foi a minha primeira lousa, os estudantes – sabugos de milho; essa sala de aula imaginária era fantástica.

Meus primeiros anos escolares foram na Escola Municipal Menino Jesus, no interior do município de Frederico Westphalen, Rio Grande do Sul (RS), até a quarta série. Para cursar a quinta série, necessitava deslocar até a cidade. Estudei na Escola Nossa Senhora Auxiliadora de Frederico Westphalen, colégio particular do município. Ganhei bolsa, que não era integral, por isso, meus pais contribuíam com alguns produtos agrícolas, completando a mensalidade. Como a Escola possuía Curso Normal, frequentei ali mesmo; finalizei em 1990. Foram tempos difíceis, mas decisivos para me tornar professora. Filha de pequenos agricultores, a quinta filha, quatro irmãos mais velhos, dentre eles, uma irmã e um irmão mais novos. Ainda no período do longo estágio de seis meses do magistério, prestei vestibular para Pedagogia.

Cursei Pedagogia, na Universidade Regional e Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI), Câmpus de Frederico Westphalen, e finalizei em 1994. Em seguida, iniciei o Curso de Especialização em Psicopedagogia, também na instituição, o qual conclui em 1998.

O desejo de cursar licenciatura em Matemática foi despertado durante o Curso Normal, todavia, como a URI não o oferecia, não consegui, naquele momento, concretizá-lo. Em 1999, a Universidade ofertou Licenciatura em Matemática, na modalidade de férias, cursei, e finalizei em 2003. Em 2018, realizei o Curso de Atendimento Educacional Especializado (AEE) e, em 2020, finalizei duas pós-graduações[1].

Acerca de minha atuação profissional, em 1993, assumi uma nomeação, em séries iniciais, no Município de Caiçara/RS, onde atuei por 14 anos como professora. Em 2002, assumi uma nomeação no Estado do Rio Grande do Sul, na Escola de Ensino Fundamental Afonso Pena, local em que atuo até hoje. Em 2007, assumi um concurso no município de Frederico Westphalen, disciplina de Matemática, séries

[1] Em Neuropsicopedagogia e Metodologia do Ensino de Matemática, ambas a distância, pela UNOPAR.

finais do Ensino Fundamental. Atualmente, estou diretora, 40 horas, na Escola Estadual de Ensino Fundamental Afonso Pena. Continuo com 20 horas no município, contudo, permutada nesta escola.

Sempre visionei uma formação maior, por conseguinte, com o Mestrado em Educação, pretendo associar os conhecimentos teóricos à minha caminhada em escolas públicas. Espero que o Mestrado aprimore meus conceitos educacionais, consolidando-os com conhecimentos adquiridos na prática escolar, atingindo, dessa maneira, novos patamares na trajetória educacional. Certamente, a caminhada empreendida agrega um vasto conhecimento e embasamento teórico, bem como a possibilidade de ampliar o horizonte e a criticidade, enfatizando onde estou e aonde quero chegar.

Cursar o Mestrado significa garantir inúmeros benefícios intelectuais. Na atualidade, não vemos muitos professores com Mestrado no Ensino Fundamental das escolas públicas. No entanto, estes profissionais deveriam estar mais bem munidos de saberes metodológico; professores bem qualificados exercem ainda mais um ensino por excelência. No meio acadêmico é o local onde encontramos ideias inovadoras, tanto no conceito, quanto na prática; a troca de saberes faz-se necessária. Na troca, há o aprender a fazer, aprender a ser, com aliados comprometidos com a educação. É um investimento na ótica de mudar os rumos da educação pública, principalmente no campo educacional.

Não poderia esquecer de mencionar as transformações concernentes à gestão escolar. Um bom gestor precisa, mais do que nunca, em tempos difíceis, ter conhecimentos e suporte para acolher professores assoberbados de trabalhos, tal como estudantes rodeados de tecnologias, nem um pouco interessados no ensino tradicional de giz e quadro.

1.2 Estado do Conhecimento: o que nos dizem as pesquisas?

O Estado do Conhecimento teve o propósito de, a partir de um levantamento bibliográfico, fazer o mapeamento da produção científica sobre tema, por meio da busca por de teses e dissertações já publicadas. Buscamos mapear e analisar, quantitativa e qualitativamente, publicações relacionadas a pesquisa aqui proposta, trabalhos já realizados em relação ao problema, entre outros afins. Segundo Morosini e Fernandes (2014, p. 155):

> [...] o estado do conhecimento é identificação, registro e categorização que levem à reflexão e síntese sobre a produção científica de uma determinada área, em um determinado espaço de tempo, congregando periódicos, teses, dissertações e livros sobre uma temática específica. Uma característica a destacar é a sua contribuição para a presença do novo na monografia.

O levantamento das produções acadêmicas foi realizado no Banco de Dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)[2], no segundo semestre de 2022 e revisado em março de 2023. Considerando o objetivo da pesquisa, utilizamos, para a busca, combinações de três descritores: Investigações Matemáticas, Atividades de Investigação e Ensino Fundamental. As buscas foram realizadas sem filtro de temporalidade.

Nesse rumo, sendo a Investigação Matemática um vasto campo, o recorte se deu na opção por Atividades de Investigação, em função do foco na aprendizagem pelo pensar e fazer matematicamente, e Ensino Fundamental, para pensar a fase da Educação Básica à qual direcionamos a pesquisa.

A primeira busca, com os descritores "Investigação Matemática" *AND* "Atividades de Investigação" *AND* "Ensino Fundamental", está representada na figura a seguir:

Figura 1 – Diagrama da primeira busca com os descritores "Investigação Matemática" *AND* "Atividades de Investigação" *AND* "Ensino Fundamental"

Fonte: Elaborado pela Autora (2022)

[2] No endereço eletrônico: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/.

A Figura 1 fornece uma visão geral do Estado do Conhecimento, incluindo os três descritores eleitos para o estudo. Como resultado da primeira busca, encontramos 12 pesquisas. Realizamos a leitura flutuante dos resumos, todas foram registradas, posto serem relevantes ao tema da pesquisa. O Quadro 1 traz informações resumidas sobre os 12 achados:

Quadro 1 – Trabalhos para os descritores “Investigação Matemática” *AND* “Atividades de Investigação” *AND* “Ensino Fundamental”

(continua)

Título	**Autor(a)**	**Tipo de trabalho/ano/IES**	**Assunto**
1- Investigação histórica nas aulas de Matemática: avaliação de duas experiências	BEZERRA, Odenise Maria	Dissertação Mestrado 2008 Universidade Federal do Rio Grande do Norte	O estudo reflete sobre alguns aspectos processuais acerca do desenvolvimento da aprendizagem Matemática, a partir da experiência com atividades investigativas, acerca da resolução de Equação do 2º grau.
2- Abordando geometria por meio da Investigação Matemática: um comparativo entre o 5º e 9º anos do Ensino Fundamental	SCHMITT, Fernanda Eloisa	Dissertação Mestrado 2015 Centro Universitário Univates	Este estudo se refere a atividades de geometria abordadas à luz da metodologia da Investigação Matemática com alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental.
3- Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de Matemática	REGINALDO, Bruna Karla Silva	Dissertação Mestrado 2012 Universidade Federal de Minas Gerais	O objetivo desta pesquisa é compreender como se desencadeia e se desenvolve a argumentação Matemática dos estudantes em uma atividade de Investigação Matemática.
4- Investigação Matemática: tratamento da informação no Ensino Fundamental	BALKE, Marlova Elizabete	Dissertação Mestrado 2011 Universidade de Passo Fundo	A questão norteadora da investigação é responder à questão: em que medida a metodologia da investigação potencializa a apropriação de significados dos conceitos que compõem o bloco de conteúdos de tratamento de informação?
5- Aprendizagens matemáticas desenvolvidas em ambiente de investigação estatística	AVI, Emanueli Bandeira	Dissertação Mestrado 2012 Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul	Esta pesquisa aborda as aprendizagens através da pergunta norteadora: Quais são as aprendizagens mobilizadas por atividades de investigação estatística e articuladas pelas linguagens dos alunos, nos processos interativos de significação de conceitos estatísticos e matemáticos?
6- Cartografia e Investigação Matemática: possibilidades para uma intervenção pedagógica com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental	MARIANI, Mateus	Dissertação Mestrado 2017 Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social	O trabalho teve como objetivo investigar como alunos do 9º ano do Ensino Fundamental operam com atividades de Investigação Matemática envolvendo Cartografia e conteúdos matemáticos.

Quadro 1 – Trabalhos para os descritores “Investigação Matemática” *AND* “Atividades de Investigação” *AND* “Ensino Fundamental”

(conclusão)

7- Atividades investigativas para o ensino da Álgebra em turmas de 7° ano e 9° ano do Ensino Fundamental	MACCALI, Ludmila	Dissertação Mestrado 2017 Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social	O objetivo deste trabalho foi analisar as estratégias elaboradas por alunos do 7° e 9° ano ao realizarem atividades investigativas em grupo e envolvendo concepções algébricas.
8- Do ensino tradicional à iniciação a atividades de Investigação Matemática: desconstruindo velhos hábitos	SANTOS, Osmair Carlos Dos	Dissertação Mestrado 2018 Universidade Federal de Goiás	O trabalho teve como objetivo principal estudar quais mudanças precisamos realizar nas aulas rumo à Investigação Matemática.
9- Atividades investigativas com foco em equações do 2º grau: possibilidades e limitações dos alunos do 9° ano do Ensino Fundamental	AZEVEDO, Mara Oliveira de	Dissertação Mestrado 2019 Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social	O objetivo foi investigar, por meio de questionamentos metacognitivos, contribuições das atividades investigativas para o ensino de Equações do 2º grau.
10- Caminhos reais no plano ensino aprendizagem dentro do encantado mundo dos números complexos	ASSIS, João Matheus Santos	Dissertação Mestrado 2022 Universidade Estadual de Santa Cruz	O objetivo deste trabalho é refletir sobre o lugar dos números complexos no ensino médio e superior e propor atividades relacionadas a esse todo matemático para estudantes de pós-graduação em Matemática. Foram apresentadas quatro tarefas baseadas nos campos de estudo Investigação Matemática e Informática na educação, origem dos números complexos e estudo das transformações elementares ao nível complexo.
11-Uma ação de formação de professores na e para uma abordagem investigativa em aulas de Matemática	SILVA, Denise Knorst da	Tese (doutorado) 2018 Universidade Federal de Santa Catarina	Esta tese teve o objetivo de estudar abordagens relacionadas à prática docente com metodologias de ensino de pesquisa e suas possibilidades de orientar atividades educativas e aprendizagem Matemática como construção teórico-prática.
12- Investigações Matemáticas como metodologia de ensino para uma aprendizagem significativa	SILVA, Breno Puertas de Freitas e	Dissertação Mestrado 2022 Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos	O objetivo desta pesquisa é fornecer uma base para tornar a Matemática mais fácil para os alunos do ensino fundamental compreenderem enquanto eles trabalham em alguns tópicos do nível elementar que muitas vezes são negligenciados ou mal desenvolvidos nesta fase da escola.

Fonte: Elaborado pela Autora (2023)

O resultado denotou que a temática “a Investigação Matemática em sala de aula no Ensino Fundamental” está diretamente relacionada às práticas em sala de aula. Quanto às abordagens, haja vista a análise dos resumos empregada, observamos a predominância da abordagem qualitativa. A sustentação da pesquisa deu-se nos aportes de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) e Ponte *et al*. (2013).

Passamos, brevemente, a discorrer sobre as pesquisas localizadas na busca no Banco de Dados da CAPES para os descritores “Investigação Matemática” *AND* “Atividades de Investigação” *AND* “Ensino Fundamental”.

Odenise Maria Bezerra (2008) fez um trabalho de reflexão acerca de alguns aspectos processuais do desenvolvimento da aprendizagem matemática, a partir de experiências com atividades investigativas, com o uso de textos em histórias da Matemática e resolução de problemas de Equação do 2º grau. A pesquisa teve duas etapas, a primeira serviu de base para a segunda. A intenção foi investigar como o grupo participante se envolveu na realização das atividades de Investigação Matemática, apoiando-se no uso de Histórias Matemáticas. Tendo os resultados como fundamento, o estudo possibilitou compreender que as atividades de investigação propiciam o desenvolvimento dos estudantes, o alcance de aprendizagem e o desenvolvimento de habilidades e competências para a investigação como veículo de construção do conhecimento matemático.

Fernanda Eloisa Schmitt (2015) desenvolveu sua pesquisa com estudantes do quinto e nono ano do Ensino Fundamental, em duas Escolas Públicas. Teve como objetivo investigar as conjecturas apresentadas pelos estudantes e as diferenças e semelhanças que os mesmos destas distintas turmas apresentam. Tencionou, ainda, estimular à cultura da escrita em Matemática, proporcionando momentos de autonomia. Os aportes teóricos usados pela pesquisadora também se alicerçaram nos escritos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), que instigam os estudantes à descoberta de novos saberes. Como resultado, verificou a dificuldade no manuseio da régua e do transferidor. Percebeu que os estudantes conseguem se expressar oralmente, porém, no momento de escrever, apenas o fazem de forma sintética. Como ponto positivo, o trabalho em grupo foi bem produtivo, trabalham de forma colaborativa, permitindo trabalharem com o novo e inesperado. Essa pesquisa não possui divulgação autorizada.

Bruna Karla Silva Reginaldo (2012) realizou a pesquisa com estudantes do nono ano do Ensino Fundamental, objetivando compreender como se desencadeia e se desenvolve a argumentação matemática dos estudantes em atividade de Investigação Matemática. Os referenciais teóricos ampararam-se em Boavida e as Investigações Matemáticas em Ponte, Brocardo e Oliveira (2009). A pesquisa foi organizada em três partes: na primeira parte descreveu e analisou situações em que ocorreram argumentação, na segunda foram relatadas e analisadas situações em de argumentação, na terceira apresentou e discorreu os obstáculos vivenciados durante a realização das atividades investigativas, que atravancaram o desenvolvimento da argumentação. Constatou que os estudantes conseguem fazer argumentações, desde que estimulados, que o professor busque atividades diferenciadas de forma de condução, não permanecendo no Paradigma de Exercícios.

Marlova Elizabete Balke (2011) fez a pesquisa com estudantes da oitava série do Ensino Fundamental, teve como objetivo analisar o potencial da metodologia de Investigação Matemática no desenvolvimento do bloco de conteúdos de tratamento de informação. Serviram como aporte os estudos de Lopes e Buehring, os Parâmetros Curriculares Nacionais, a base teórica de Ponte, Vygotski e Duval. A questão norteadora da pesquisa foi: em que medida a metodologia de investigação potencializa a apropriação de significado dos conceitos que compõem o bloco de conteúdos de tratamento de informação? Constatou que as atividades de Investigação Matemática possibilitam a interação em sala de aula, a apropriação dos conceitos de tratamento de informação, a reflexão da postura do professor em sala de aula. Ainda, reforçou que o conteúdo contextualizado se faz necessário, por meio da interação com o ambiente de sala de aula.

Emanueli Bandeira Avi (2012) executou seu estudo com 13 estudantes voluntários do oitavo ano do Ensino Fundamental, no intuito de abordar aprendizagens que possibilitam explorar as relações existentes entre diferentes conhecimentos matemáticos. Foram feitos dez encontros norteados por atividades de Investigação Matemática, nas teorias de Ponte, Brocado e Oliveira. Os dados empíricos foram analisados com vistas à teoria histórico-cultural desenvolvida por Vygotski. As reflexões oportunizaram a compreensão de sentidos e significados de conceitos matemáticos, estabelecidos entre a interação, professor, colega e estudante.

Mateus Mariani (2017) investigou estudantes do nono ano do Ensino Fundamental. Teve como meta investigar como eles operavam atividades de Investigação Matemática, envolvendo cartografia e cálculos matemáticos. O estudo teve fundamentos em Ponte, Brocardo e Oliveira no que se refere à tendência metodológica Investigação Matemática, com a finalidade de promover conceitos de Cartografia e Matemática. Os resultados apontam a Investigação Matemática como uma metodologia de ensino que pode despertar nos estudantes o interesse pela descoberta. No decorrer da pesquisa, surgiram alguns conceitos de área, perímetro, proporção e análise de gráficos. Essa pesquisa não possui divulgação autorizada.

Ludmila Maccali (2017) desenvolveu seu estudo com estudantes do sétimo e do nono anos do Ensino Fundamental. Analisou atividades investigativas em grupo, envolvendo concepções algébricas. As contribuições teóricas que sustentaram a pesquisa estão alicerçadas nas ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira. Durante a realização das práticas, os grupos utilizaram diferentes estratégias para a resolução das atividades propostas, como desenhos e fórmulas. Concluiu que tais atividades proporcionam aos estudantes momentos de autonomia, cooperação e interesse pela descoberta, percebeu que os estudantes gostam de serem desafiados e, assim, elaboram distintas estratégias de resolução de atividades.

Osmair Carlos dos Santos (2018) trabalhou com estudantes do nono ano do Ensino Fundamental. Procurou entender quais mudanças precisam ser realizadas em nossas salas de aula rumo à Investigação Matemática. A pesquisa se fundamentou na ideia de que as atividades de cunho exploratório despertam a curiosidade aos estudantes desenvolvendo o raciocínio lógico, levando-o a estabelecer estratégias, formular seus próprios questionamentos, realizar testes, de modo a construir sua própria aprendizagem.

Mara Oliveira de Azevedo (2019) fez a pesquisa com 24 estudantes do nono ano, perscrutou as contribuições das atividades investigativas para o ensino de Equações de 2º Grau. Baseou-se teoricamente em Ponte, Brocardo e Oliveira (2009). Em relação às Equações de 2º grau, utilizou ideias de Lins e Gimenez; Chavante e Dante. Para análise de dados, empregou a análise de conteúdo de Bardin, sendo elaboradas três categorias: 1) dificuldades no decorrer da exploração das atividades investigativas; 2) possibilidades em relação às atividades de Investigação Matemática; 3) manifestações metacognitivas. Como resultado, averiguou dificuldades no conteúdo de Equações do 2º Grau, fazer relações, interpretações, escritas e conclusões. Apurou que os estudantes conseguem expressar suas ideias oralmente, mas na escrita, fazem-no somente de forma sintética. No trabalho em grupo, percebeu a evolução na escrita, elaboração de diferentes estratégias de resolução. Essa pesquisa não possui divulgação autorizada.

João Matheus Santos Assis (2022) trouxe uma discussão em torno dos números complexos, como eles aparecem no Ensino Fundamental e Médio, bem como nos cursos de licenciatura em Matemática, para isso, valeu-se das transformações de Mobius, sendo produzidas diversas ferramentas autorais no software GeoGebra. Defendeu abertamente o posicionamento sobre os números complexos serem vistos somente na graduação, convergindo, assim, com os documentos normativos. No entanto, quando analisou os Projetos Pedagógicos dos Cursos de Licenciatura em Matemática de algumas instituições públicas de ensino baianas notou que, na maioria dos casos, a disciplina envolvendo a temática não foi pensada especificamente para seu público-alvo, e sim para o bacharelado. Propôs quatro atividades, fundamentadas nas tendências de ensino Investigação Matemática e na Informática na educação, explorando a origem dos números complexos e as transformações elementares no plano complexo.

Denise Knorst da Silva (2018), através de sua tese, analisou os saberes dos professores em aulas de Matemática em atividades de aprendizagem orientadas para uma abordagem investigativa como ferramenta pedagógica na formação de professores. Com base no aspecto metodológico da pesquisa narrativa, a proposta apresentou detalhadamente os objetivos e características dos casos de aprendizagem, descreveu seu desenvolvimento e trouxe reflexões e análises à luz do problema: que compreensões sobre a abordagem investigativa em aulas de Matemática são produzidas por professores em formação mediante a análise de casos de ensino? Os resultados apontam para o potencial de um estudo de caso na compreensão da abordagem investigativa de professores na educação, pois a análise traz reflexões sobre os seguintes temas: tarefa de pesquisa, atividade matemática e comunicação como diálogo, definidos como elementos que descrevem a abordagem de pesquisa.

Breno Puertas de Freitas e Silva (2022) elencou como objetivo ajudar a resolver, ou minimizar alguns problemas de cálculo mental para estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental, para isso criou uma sequência de ensino sobre cálculo mental e outra sobre áreas e perímetros, usou como metodologia atividades exploratórias, baseadas nas teorias de Vygotski, visando o desenvolvimento da autonomia intelectual para escolher o melhor modo de chegar aos resultados.

Em continuidade, para a segunda busca, com os descritores “Investigação Matemática” *AND* “Atividades de Investigação”, não estabelecemos filtros, localizando-se 14 resultados. Entre eles, os 12 trabalhos que já haviam sido mencionadas na busca anterior. Feita a leitura flutuante dos resumos, eliminamos os repetidos e registramos dois restastes, sempre levando em conta a pertinência ao tema da pesquisa proposto. O Quadro 2 relaciona estes trabalhos:

Quadro 2 – Trabalhos para os descritores “Investigação Matemática” *AND* “Atividades de Investigação”

Título	Autor(a)	Tipo de trabalho/ano/IES	Assunto
1- A comunicação em Investigação Matemática	SOUZA, Leandro Caciolato de	Dissertação Mestrado 2021 Universidade Tecnológica Federal do Paraná	O objetivo principal deste trabalho foi identificar características da comunicação que ocorre em atividades de Investigação Matemática desenvolvidas na sala de aula.
2- Argumentação e Demonstração em Alunos do Ensino Médio: uma proposta de Investigação Matemática sobre crescimento e decrescimento de funções afins	CAMPOS, Rodrigo Ruiz	Dissertação Mestrado 2018 Universidade de São Paulo	O presente trabalho tem como objetivo estudar se as atividades de Investigação Matemática podem ajudar a desenvolver a capacidade de argumentação e demonstração matemática nos alunos do Ensino Médio

Fonte: Elaborado pela Autora (2023)

Nesta segunda combinação dos descritores “Investigação Matemática” *AND* “Atividades de Investigação”, depois de eliminados os 12 trabalhos repetidos e já analisados na primeira combinação, as duas investigações consideradas importantes para o estudo são as pesquisas de Leandro Caciolato de Souza (2021) e de Rodrigo Ruiz Campos (2018).

Leandro Caciolato de Souza (2021) ressaltou que a Investigação Matemática oportuniza a interação e a participação ativa dos estudantes, emergindo comunicações com características matemáticas predominantes, seguidas das procedimentais. Rodrigo Ruiz Campos (2018), por seu turno, explorou a diferença entre o Ensino Fundamental, Médio e Superior, considerando que, enquanto a Escola Básica trata a Matemática com base em procedimentos aritméticos e algébricos, do ponto de vista prático – tais como contas, medições, equações, análise de dados – o Ensino Superior exige mais abstração por parte do estudante, na qual a argumentação, o raciocínio lógico (dedutivo e indutivo) e as demonstrações são condições necessárias para a produção do conhecimento.

Na sequência, para a terceira busca, com os descritores “Investigação Matemática” *AND* “Ensino Fundamental”, não determinamos filtros, chegando a 58 resultados. Dentre eles, alguns já haviam sido localizados nas buscas anteriores. Feita a leitura flutuante dos resumos, eliminados os textos repetidos, registramos três trabalhos, por serem importantes ao tema pesquisado e, em razão disso, trazerem a Álgebra como suporte. O Quadro 3 apresenta estes trabalhos:

Quadro 3 – Trabalhos para os descritores “Investigação Matemática” *AND* “Ensino Fundamental”

Título	Autor(a)	Tipo de trabalho/ano/IES	Assunto
1- Investigação Matemática: uma análise da sua contribuição na construção de conceitos algébricos.	BACCARIN, Sandra Aparecida de Oliveira	Dissertação Mestrado 2008 Universidade de Brasília	O objetivo deste trabalho foi investigar as possibilidades da pesquisa matemática em sala de aula, na construção de conceitos algébricos em alunos do 7º ano do ensino fundamental.
2- Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: uma proposta de aplicativo	CAMPEÃO, Vagner	Dissertação Mestrado 2020 Universidade Estadual de Londrina	Este artigo apresenta uma proposta de desenvolvimento do pensamento algébrico nas séries iniciais do ensino fundamental utilizando o aplicativo Algebrizar aliado a uma estratégia de Investigação Matemática, em consonância com as competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular – BNCC.
3- “Resolução de Equações do 1º grau com uma incógnita por meio do uso do material Álgebra Tiles”	MEINERZ, Franciele Marciane	Dissertação Mestrado 2020 Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Este estudo examina como o material manipulativo *Álgebra Tiles* pode contribuir para o desenvolvimento do procedimento de resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, já que, a partir da representação de uma situação-problema com o material e a sua manipulação, pode ser gerado o registro pictórico e, a partir deste último, o registro algébrico, havendo a construção natural de uma equação.

Fonte: Elaborado pela Autora (2023)

Na terceira busca, feita a combinação dos descritores, as pesquisas que se mostraram importantes foram de Sandra Aparecida de Oliveira Baccarin (2008), Vagner Campeão (2020) e Franciele Marciane Meinerz (2020).

Sandra Aparecida de Oliveira Baccarin (2008) abordou a “Investigação Matemática: uma análise da sua contribuição na construção de conceitos algébricos”, esta pesquisa teve como norte a Investigação Matemática e a construção do pensamento algébrico pelos estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental, com aporte nas ideias de Ponte (2003), Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2004), Chevallard, Bosch e Gascón (2001), fundamentados pela teoria de Vygotski (1934) e

Vergnaud (1994). Foi realizada a pesquisa de campo a um convite a resolução de problemas, o professor atuou como mediador, os alunos fizeram trocas e construções matemáticas a partir destas agregado ao entusiasmo e interesse as atividades matemáticas.

Vagner Campeão (2020) dissertou a respeito do “Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: uma proposta de aplicativo Algebrizar”, alinhado à Investigação Matemática e às competências e habilidades da Base Nacional Comum – BNCC. Teve como objetivo apresentar o aplicativo de forma a auxiliar os professores em suas práticas em sala de aula com o conteúdo de Álgebra desde os anos iniciais, como prevê este documento de maneira lúdica, fazendo conjecturas, levantando hipóteses, testes e formulação, e construção do pensamento algébrico.

E, a “Resolução de Equações do 1º grau com uma incógnita por meio do uso do material Álgebra Tiles” foi o tema tratado por Franciele Marciane Meinerz (2020). A pesquisadora criou situações-problemas baseadas no ensino e aprendizagem presentes em Linz e Gimenez (1997) e Usiskin (1995), buscando a transição entre a aritmética e a Álgebra, também fundamentada nas Teorias dos Registros de Representação Semiótica de Duval. A pesquisa se deu com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, que a partir da manipulação da situação-problema apresentada os estudantes puderam fazer um registro pictórico e assim a construção algébrica.

Subsequentemente, na quarta busca, com os descritores “Atividades de Investigação” *AND* “Ensino Fundamental”, também não estipulamos filtros e encontramos 27 resultados. A maioria deles já relacionados nas buscas 01, 02 e 03. Feita a leitura flutuante dos resumos, não localizamos nenhuma pesquisa nova que viesse ao encontro do tema.

Finalmente, na quinta e última busca, com o descritor “Investigação Matemática”, sem estabelecermos filtros, foram localizados 175 resultados. Alguns já haviam sido encontrados nas buscas anteriores. Feita a leitura flutuante dos resumos, registramos dois, relevantes ao tema pesquisado.

O Quadro 4 exibe os trabalhos selecionados nessa busca:

Quadro 4 – Trabalhos para o descritor “Investigação Matemática”

Título	Autor(a)	Tipo de trabalho/ano/IES	Assunto
1- Atividades investigativa na resolução de equações do 1º grau, por alunos do sétimo ano	MACHADO, Viviane Menezes de Souza	Dissertação Mestrado 2020 Universidade Estadual de Londrina	O objetivo deste estudo é compreender como a atividade de pesquisa com equações do 1º grau promove o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do sétimo ano de uma escola particular de ensino fundamental. Trata-se de um estudo de caso desenvolvido em pesquisa qualitativa.
2- Produto educacional: guia didático para o ensino e a aprendizagem de equação do primeiro no 7º ano do ensino fundamental	ALENCAR, Silas Senhorinha de	Dissertação Mestrado 2019 Universidade Federal do Acre	Teve como objetivo criar um guia didático para atividades que incluam conceitos de Álgebra aplicados à escrita algébrica, cálculo de área, cálculo de perímetro e diferenciação de equações do 1º ano, aplicando a metodologia de Investigação Matemática.

Fonte: Elaborado pela Autora (2023)

Essa busca trouxe a pesquisa “Atividades investigativa na resolução de equações do 1º grau, por estudantes do sétimo ano”, de Viviane Menezes de Souza Machado (2019). Trata-se de um estudo de caso de natureza qualitativa. Foram coletados dados através de um diário de campo da pesquisadora, atividades escritas e gravações das aulas. O referencial teórico se fundamentou em conceitos de Investigação Matemática como atividades de ensino e aprendizagem, de Ponte, Brocardo e Oliveira. A pesquisa resultou dados para analisar como os estudantes formulam hipótese, elaboram novas estratégias diante de atividades que envolvam equações de 1º grau.

Outro resultado que a quinta busca trouxe foi a pesquisa de Silas Senhorinha de Alencar (2019), intitulada “O uso da Investigação Matemática na aprendizagem de Equação do 1º grau no 7º ano”, com abordagem metodológica em Moreira; Ludke e André; Yin e referencial teórico em Ponte, Brocardo e Oliveira, por defenderem o uso de Investigações Matemáticas como atividades de ensino e de aprendizagem. Realizou uma análise de situações-problemas que os livros didáticos contextualizam, traduzindo para uma linguagem matemática, com expressões algébricas e Equações de 1º Grau.

Após executadas todas as buscas, as quais são consideradas como âncoras para o Estado do Conhecimento, fizemos um novo registro, a fim de termos uma visão geral de toda a pesquisa, e o demonstramos na Tabela 1.

Destacamos, como já referido, que alguns resultados se repetiram nas buscas, não sendo citados novamente, uma vez que já haviam sido analisados e considerados nas buscas anteriores. Aqui, a título de informação, tomamos como período os anos do primeiro e último trabalho, respectivamente.

Tabela 1 – Números de trabalhos utilizando os descritores do banco de teses e dissertações da Capes (2008-2022)

Descritores	**N. de trabalhos**	**Trabalhos considerados**
“Investigação Matemática” *AND* “Atividades de Investigação” AND “Ensino Fundamental”	12	12
“Investigação Matemática” *AND* “Atividades de Investigação”	14 (12 citadas na busca anterior)	2
“Investigação Matemática” *AND* “Ensino Fundamental”	58	3
“Atividades de Investigação” *AND* “Ensino Fundamental”	27	0
“Investigação Matemática”	175 (alguns resultados já haviam sido citados nas buscas anteriores)	2

Fonte: Elaborado pela Autora (2023)

A partir desse material, efetuamos o mapeamento, identificação, classificação e análise do material científico coletado, com intuito de esboçar o Estado do Conhecimento tangente às palavras-chave “Investigação Matemática” *AND* “Atividades de Investigação” *AND* “Ensino Fundamental”. Buscamos, também, identificar alguns aspectos relevantes já pesquisados nessa linha de estudo e que dimensões vêm sendo destacadas.

Com base nas análises das produções acadêmicas do banco de dados da CAPES, foi possível definir algumas características do contexto pesquisado, como: Investigação Matemática, atividades de investigação e Ensino Fundamental. Todos os descritores citados apresentam, direta ou indiretamente, a Investigação Matemática. É perceptível que, nos resumos analisados, a produção se concentra na temática principal.

Dessa forma, utilizando as referências bibliográficas como pesquisa, observando metodologias de diversos autores e pesquisas que vêm colaborando com o crescimento e desenvolvimento do ensino da Matemática e seu entendimento nos bancos escolares, o enfoque nos estudantes do Ensino Fundamental, compreendemos a importância de investigar sobre como esse processo de investigação ocorre, delineando o interesse de nossa pesquisa em investigar como os estudantes estruturam a exploração, as conjecturas e a justificação ao participarem de uma atividade de Investigação Matemática. Abordamos a Investigação Matemática em sala de aula com os olhares de Ponte (2003, 2009) e Skovsmose (2000, 2014).

Optamos por uma pesquisa qualitativa e de campo, com a intencionalidade de desenvolver atividades com os estudantes. Para essa finalidade, elegemos o campo da Álgebra como elemento mobilizador da proposta, considerando que, a partir de nossa experiência docente, se coloca como um dos conteúdos com maior dificuldade nos processos de ensino e de aprendizagem, no Ensino Fundamental. Percebemos que o conteúdo requer um olhar diferenciado, utilizando metodologias distintas e salientamos que as questões investigativas precisam ser/estar presentes no dia a dia da sala de aula.

Este trabalho não tem a intenção de esgotar o tema investigado, mas enseja instigar novas pesquisas com enfoques e pontos de vistas diferentes. Com relação ao tema Investigação Matemática, constatamos, cada vez mais destaque na produção acadêmica, dado que as exigências do novo perfil docente vão além do domínio de conteúdos e aplicação de estratégias e técnicas de ensino, necessita-se de professores capacitados, habilidosos, com mentes mais abertas e evoluídas, com nível de percepção e de consciência ampliada para as possibilidades de interações que podem ocorrer no interior da sala de aula.

Hoje, sabemos que o conhecimento não é/está pronto e acabado, temos a certeza de sua transitoriedade e do processo de construção, isso leva a identificar que a formação precisa ser permanente, exigindo do professor atualização constante para que possa ter uma prática pedagógica condizente com as exigências da contemporaneidade.

2 A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Nesta seção, amparados em uma discussão bibliográfica, propomo-nos a identificar os principais conceitos e princípios que ancoram a Investigação Matemática no campo teórico e suas etapas como instrumento metodológico. Apresentamos os elementos de um Ambiente de Aprendizagem na perspectiva de Cenários para Investigação e desenvolvemos acerca dos pressupostos de uma Cooperação Investigativa.

Argumentamos que a aprendizagem matemática é mobilizada pelo interesse e curiosidade dos estudantes, portanto, desafiá-los precisa ser uma constante nas escolas. Ainda, é necessário que, na escola, aconteçam momentos de aprendizagem que favoreçam a interdisciplinaridade, ampliando horizontes. As situações práticas deveriam estar presentes, relacionadas com os conteúdos trabalhados.

A Matemática requer ser olhada também como uma linguagem, é possível visualizá-la, fazer interpretações, relações e, assim, ela se torna rica, abrangente e amplia conhecimentos, favorecendo o pensamento crítico. O processo da escrita caminha com o processo da oralidade. Algumas crianças/estudantes erram cálculos simples em sala de aula, porém, quando expostas/os a situações de vida que exigem destreza e sobrevivência, o fazem sem cometer erro algum. O simples fato de vender um chocolate no semáforo o torna um "calculista".

No ensino da Matemática não há receitas prontas e próprias para cada situação, é preciso desafiar e buscar alternativas a cada dia, com significados reais. Acreditamos que a escola necessita envolver os estudantes no tema matemático estudado, despertando curiosidade, interesse e comprometimento.

No campo da Educação Matemática, interessa-nos pensar um contexto da sala de aula que:

> [Os alunos podem ter] um saber da Matemática em construção e do trabalho criativo e independente... [eles podem] generalizar a partir da observação dos casos, [usar] argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito Matemática de uma situação concreta (Pólya, 1981 *apud* Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 19).

Defendemos a necessidade de contraposição ao modelo de aula em que o professor ocupa o maior tempo com exposição e os estudantes com resolução de exercícios, cuja premissa central é de que exista uma e somente uma resposta correta. Isso significa repensar o pensar em Ambientes de Aprendizagem, com centralidade na investigação, ambientes em que o estudante se sinta engajado nos processos de ensino e de aprendizagem, promovendo reflexões sobre a Matemática e suas aplicações. Consideramos, então, uma abordagem de Investigação Matemática que promova uma Cooperação Investigativa.

2.1 O conceito educativo da investigação matemática

Uma das preocupações concernentes, incialmente, ao termo Investigação Matemática, foi buscar o sentido da palavra investigar, para focar no campo teórico mais amplo que a própria pesquisar requer. Dessa forma, valemo-nos de pesquisadores e do próprio dicionário.

Mas, afinal, o que é investigar? De forma simplista, é procurar conhecer o que não se sabe. Logo, nosso trabalho se pautou no pesquisar, descobrir o que não se sabe, ou aprimorar, procurar informações a respeito. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 13), "investigar é procurar conhecer o que não se sabe. Com um significado muito semelhante, senão equivalente, temos em português os termos 'pesquisar' e 'inquerir'". Nesse rumo, de acordo com o Dicionário da Língua Portuguesa Evanildo Bechara (2011, p. 737), inquirir significa "tentar obter informações sobre fazer perguntas, questionar"; enquanto a definição dada a palavra pesquisar é "pesquisar de maneira aplicada, obter informações sobre (algo ou alguém)" (Bechara, 2011, p. 920).

Em Matemática, Ponte (2022)[3] considera que investigar tem duas facetas: a primeira requer produzir uma conjectura ou uma justificação, a partir de uma dada questão; a segunda, validar uma conjectura ou generalização, o que significa produzir um argumento informal ou até mesmo uma demonstração. O autor leva em conta que a "situação mais forte e educacionalmente mais interessante é quando o estudante tem um papel ativo em todo o processo – da formulação de questões, à elaboração de conjecturas, à realização de provas e à demonstração matemática" (Wichnoski, 2022, p. 10).

As aulas de Matemática, na perspectiva investigativa, contribuem para o desenvolvimento do pensamento matemático crítico, uso de competências e

[3] Entrevista concedida pelo professor João Pedro da Ponte para Paulo Wichnoski e publicada em artigo no periódico Revista Paranaense de Educação Matemática (Wichnoski, 2022).

habilidades, busca, pesquisa, organização, criatividade, senso crítico, iniciativa, persistência e, principalmente, a capacidade de argumentar e se comunicar matematicamente, de forma autônoma e autêntica, os estudantes passam a ser responsáveis pelo processo de aprendizagem.

> Uma Investigação Matemática[4], normalmente, surge a partir ou de um ou mais problemas. A primeira coisa a se fazer é identificar esse problema, em um segundo momento tentar achar resoluções, investigar. O matemático inglês Ian Stewart (1995) conceitua um bom problema: Um bom problema é aquela cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos [...] (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 17).

Ao tentarmos resolver os problemas matemáticos, embora haja um modelo/exemplo que possa ser seguido, seremos surpreendidos com novas conjecturas conceituais e, por seu turno, chegamos a outras buscas, descobertas e questionamentos. Observamos uma distinção entre exercício e problema, conforme sugere Pólya (1981, *apud* Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 23): “Um problema é uma questão para qual o estudante não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, enquanto um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido”.

No exercício, o estudante tem em mãos o algoritmo em questão, em uma proposta com problemas o estudante vai em busca, individualmente ou em grupo, por algo contextualizado, nesse processo, é possível identificar os conteúdos a serem explorados de maneira curiosa e prazerosa, possibilitando o conhecimento dos estudantes, bem como do professor mediador neste novo contexto. Resolver problemas requer fazer tentativas, hipóteses, muitas vezes, com vários caminhos para a resolução, não se ater a uma única possibilidade. Isso favorece a autoconfiança dos estudantes, também é preciso apresentar propostas a um determinado problema.

Nos dois casos, o enunciado indica perfeitamente o que se quer. O professor consegue prever a possível resposta. É importante ressaltar que uma investigação permite que as situações sejam mais conflitantes na busca de respostas, o

---

[4] De acordo com Ponte (2022), a origem epistemológica da Investigação Matemática se situa em correntes da Filosofia da Matemática, que trazem para o primeiro plano os processos de construção ou invenção da Matemática – o intuicionismo e o falibilismo [...]. Para o intuicionismo, o fundamento da Matemática está em intuições básicas que servem de suporte à sua construção como ciência e que são as que se referem ao conjunto dos números naturais. Para o falibilismo, a Matemática se desenvolve não por um processo linear, mas através de um processo ziguezagueante de provas e refutações (Wichnoski, 2022, p. 9-10).

envolvimento do estudante é fundamental, com discussão e argumentação, articulando o uso de problemas e exercícios, mantendo equilíbrio destes fatores, que serão capazes de promover este aprendizado (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009).

Nesse panorama, Ponte (2022) demarca que

> Num problema, está complemente especificado o que é dado e o que é pedido – as condições e o objetivo do problema. Numa investigação, pelo menos um destes aspectos não está complemente especificado, sendo necessário fazer essa especificação de forma a tornar a situação num problema. Muitas vezes, isso pode ser feito de várias maneiras e, por isso, uma investigação pode dar origem a vários problemas matemáticos diferentes (Wichnoski, 2022, p. 12).

Assim, como conceito educativo, precisamos distinguir as perspectivas de trabalho por darem atenção a aspectos diferentes: “A resolução de problemas dá sobretudo atenção as estratégias de resolução dos alunos e as Investigações Matemáticas à realização de conjecturas, generalizações e justificações” (Wichnoski, 2022, p. 12).

Isso nos conduz pensar e distinguir a situação inicial e o processo, pois, o que acontece, geralmente, é que a solução de um problema não está relacionada ao processo de Investigação Matemática como forma exploratória, distanciando-se de um bom contexto com interpretações, reflexões e questionamentos.

> Assim como no processo de construção da Matemática como disciplina, a essência do processo é a pesquisa, na construção do conhecimento para cada aluno, a essência do processo tem que ser a pesquisa. Dificilmente o aluno de Matemática testemunha a ação do verdadeiro matemático no processo de identificação e solução de problemas. O professor faz questão de preparar todos os problemas a serem apresentados com antecedência; consequentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. O que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas, dando-lhe a impressão de que ele também conseguirá resolver problemas matemáticos com tal elegância (D’Ambrósio, 1993, p. 36 *apud* Lamonato; Passos, 2011, p. 53).

A formulação de hipóteses na construção do conhecimento tem como foco o processo, podendo ser linear ou incerto, possibilitando a produção e a assimilação do conhecimento, favorecendo o ensino da Matemática. Faz-se necessária a interação professor-aluno, algo que possa apontar para contribuir ou não com esse processo, isso depende dessas relações existentes (Lamonato; Passos, 2011).

Então, podemos pensar a Investigação Matemática atrelada à solução de problemas à medida em que a busca por esse recurso possibilite aos estudantes a Exploração Matemática, através de descoberta, erros, acertos e tomadas de decisões, desperte incertezas e dúvida, tendo, desse modo, outra visão da disciplina, algo a ser explorado, construído, pois não é estanque, não está dado a priori. Segundo Ponte (2003, p. 26), “investigar não é mais do que procurar conhecer, compreender, encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos”.

Dessa maneira, as atividades investigativas em sala de aula propiciam desencadear a exploração com múltiplas possibilidades para os estudantes vivenciarem o processo, é importante, também, a socialização como etapa investigativa e a valorização de todos os processos envolvidos, é preciso ter intencionalidade e cumplicidade entre o educando e o docente, tendo no horizonte este novo aprender de forma compartilhada.

Aqui, cabe o questionamento: é possível trabalhar com atividades de investigação? Essa é uma questão que podemos nos fazer diante dos estudos encontrados, visto que envolvem algo além do conteúdo em estudo, é toda uma conjectura de saberes. Será que o professor está preparado para enfrentar situações desse tipo? Os estudantes conseguem desenvolver atividades de investigação? Como encontrar suporte para esses questionamentos? Como se dá uma aula investigativa? Por onde começar? Investigar precisa estar envolvido com certo ar de curiosidade, de amorosidade pelo que se faz, busca de respostas e acomodações aos nossos anseios. Quando nos deparamos com o fato de que o ato de investigar está diretamente ligado à construção de conhecimentos, nos damos conta que investigar se faz necessário para que o aprendizado de fato aconteça.

2.2 Etapas investigativas como instrumento metodológico

Defendemos que as Investigações Matemáticas deveriam ser oportunizadas e experimentadas por todos os estudantes – o professor introduz a tarefa, os estudantes fazem a busca da investigação e finalmente a discussão dos resultados. O professor passa a ter um papel mediador das atividades, cabendo a ele ajudar o estudante a compreender e aprender a investigar.

> Existem aspectos do papel do professor que se prendem diretamente com o apoio que concede aos alunos de forma a garantir que são atingidos os objetivos estabelecidos para a atividade. No decorrer de uma investigação, essa sua ação incide sobre duas áreas principais: a Exploração Matemática da tarefa proposta e a gestão da situação didática, promovendo a participação equilibrada dos alunos na aula (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 51).

Nessa etapa de investigação, compete ao professor agir na retaguarda, procurando entender e compreender o trabalho dos estudantes, intervindo quando necessário, atuando como moderador e orientador, oportunizando a reflexão da atividade que está sendo explorada, se constitui um desafio adicional à sua prática, requer destreza, conhecimento de conteúdo e de metodologias adequadas à disciplina e/ou ao conteúdo.

O professor precisa pensar nessa aula: os estudantes farão em equipe? Individualmente? Que questões propor? Que materiais irão utilizar? Que conhecimentos precisam ter? Ou seja, tem de haver planejamento.

O ponto inicial do planejamento é a tarefa investigativa a ser atribuída aos estudantes. De acordo com Silva e Costa (2019, p. 162), são “entendidas como situações ou problemas abertos, por isso menos estruturados e que permitem a resolução por diferentes caminhos, na busca por uma das suas soluções”. Concordamos, ainda, com os autores, que as **tarefas investigativas** promovem o desenvolvimento da atividade matemática investigativa.

Investigar, em Matemática, é descobrir que podemos fazer relações com o contexto, com compreensão e intervenção no mundo em que vivemos. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) estabelecem quatro pontos fundamentais para realização de uma Investigação Matemática, como indica o Quadro 5:

Quadro 5 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática; • Explorar a situação problemática; • Formular questões.
Conjecturas	• Organizar dados; • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura).
Testes e reformulação	• Realizar testes; • Refinar uma conjectura.
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura; • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 21)

Tentaremos exemplificar os momentos de investigação: a primeira etapa é da exploração e formulação de questões. se constitui uma etapa decisiva para posteriores formulações de questões e conjecturas. Nessa etapa, os estudantes conhecem o assunto da aula, se familiarizam com os dados e teorias. Ainda, decidem se desenvolvem o estudo do tema proposto em grupo, em dupla ou individualmente. Elucidamos com um exemplo de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), no exercício de raciocínio feito pelos estudantes, a partir da apresentação da tabela dos quadrados perfeitos apresentados a eles:

> Telma: Vamos tentar o quê? Com as potências, para ver se dá alguma coisa?
> Rita: Com as raízes quadradas?
> José: 4 vezes 4, dá 16.
> Leandro: 4 vezes 4, dá 16.
> José: 5 vezes 5, dá 25.
> Telma: Está aqui.
> José: 6 vezes 6, dá 36.
> Leandro: Está aqui, não dá.
> André: Não dá.
> José: Está na primeira:
> Teresa: 7 vezes 7, dá 49. Também não dá.
> Rute: Vejam as potências. A segunda potência de qualquer coisa.
> Telma: Rute, era o que estávamos a fazer: 1 vezes 1 é 1; 2 vezes 2, são 4;3 vezes 3, 9.
> Rute: 6 vezes 6, 36. Olha lá, está aqui na primeira coluna.
> Telma: Olha lá, Rute.
> André: Isso não deve dar.
> Rute: Diz?
> André: As potências não devem dar (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 31-32).

Como segundo momento da Investigação Matemática – conjecturas – os estudantes, espontaneamente, procuram regularidades por meio de uma tabela apresentada, nesse caso, dos quadrados perfeitos. Fazem, também, algumas observações e comparações quando manipulam os números das raízes quadradas e potências. Para chegarem a conclusões mais profundas, os estudantes precisavam ter conhecimento do que é uma potência e, em seguida, das formulações de suas conjecturas, integrando conceitos e conhecimentos matemáticos que o professor desenvolve em suas aulas. Na sequência, os exercícios e atividades em sala – testes e reformulações – reforçam a aprendizagem e sanam dúvidas (se houver), por conseguinte, os estudantes estão aptos a realizarem uma avaliação do raciocínio elaborado a respeito do tema matemático trabalhado em sala (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009).

Em consonância com os autores, a Investigação Matemática possui características próprias, os resultados obtidos permitem verificar que os estudantes utilizam diferentes estratégias para solucionar questões investigativas, de acordo com a problemática em questão. As questões investigativas podem ser modificadas conforme a finalidade da aula ou da atividade desenvolvida, proporcionando maior aproveitamento das concepções prévias dos estudantes, levando a um processo de formulação de conjecturas, que devem ser testadas e provadas (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009).

As atividades investigativas precisam desencadear a exploração com múltiplas possibilidades para os estudantes vivenciarem o processo, é importante, também, a socialização como etapa investigativa e a valorização de todos os processos envolvidos, é primordial ter intencionalidade, professor e estudante passam a ser cúmplices desse novo aprender, de forma compartilhada.

> Ao iniciar a investigação, é importante também que o aluno saiba o que lhe é pedido, em termos de produto final. Perceber que é aquilo que ele vai fazer vai ser mostrado aos colegas, confere ao seu trabalho um caráter público, o que constitui para ele, simultaneamente, um estímulo e uma valorização pessoal (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 29).

Nem sempre o envolvimento do estudante nas atividades investigativas garante o êxito na aprendizagem, essas atividades devem ser incorporadas aos poucos, é necessário ousar e ir longe. A investigação Matemática é uma possibilidade para o aperfeiçoamento do conhecimento e não um fim.

Acreditamos que a Matemática deve avançar de modo investigativo nas escolas. Destacamos que as potencialidades para o ensino e aprendizagem, numa contribuição positiva, oferecem momentos de aprendizagens que propiciam a troca, o registro, a conjectura de resultados, a articulação de conhecimentos, boas relações com o ensino da Matemática, valorizar o caráter científico da disciplina, os seus benefícios, desmistificar a falta de compreensão e interpretação de desafios que ela nos apresenta.

A formulação e a testagem de conjecturas podem surgir pela observação, pela manipulação, por semelhanças com outras conjecturas, nesta etapa, faz-se importante o registro escrito também, para que os estudantes clarifiquem suas ideias, contribuindo na evolução das investigações. A justificação das conjecturas é essencial, o professor carece fazer questionamentos. Muitas vezes, essa etapa não é levada em consideração e os estudantes já passam às conclusões, sem ter passado por uma justificação de fato, levando a uma compreensão mais aprofundada do conteúdo em questão.

Ao final do trabalho de investigação, é indispensável que se faça o confronto das estratégias, justificações e conjecturas usadas. Cabe ao professor ser mediador, questionador na explanação dos resultados. Ao estudante, compete, ainda, fazer as intervenções, isso demostra o interesse e a atenção à atividade desenvolvida, despertando a significância da investigação como prática para as aulas de Matemática, com discussões produtivas e emancipatórias. As atividades de investigação não podem ser atividades isoladas, elas precisam estar no contexto da prática de sala de aula.

> A situação mais familiar na aula de Matemática é a procura de respostas para as questões colocadas pelo professor, o que pode levar os alunos a serem mais afirmativos do que interrogativos. O professor deve, pois, combater essa tendência, mostrando-lhes como é possível interrogar matematicamente as situações e formular boas questões (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 48).

Em uma aula de Investigação Matemática, é possível que os estudantes formulem questões que o professor não havia previsto, denotando aprendizado mútuo e conexões com outros conteúdos. O questionamento assume papel metodológico fundamental, as interrogativas do enunciado e/ou conteúdo apresentado têm o intuito do levantamento de hipóteses e conjecturas que levem à aquisição de conhecimentos embasados em justificativas e reflexões de conteúdos com significação.

O Ambiente de Aprendizado é essencial, fazendo mediações com teoremas e exemplificando. A avaliação, como em qualquer outra prática, faz-se basilar, mesmo em uma aula investigativa, o ato de investigar em questão e os resultados destes frente ao conteúdo.

> As investigações se reportam a diversos objetivos curriculares. Em primeiro lugar, pretende-se que o aluno seja capaz de usar conhecimentos matemáticos na resolução da tarefa proposta. Em segundo lugar, pretende-se que o aluno desenvolva a capacidade de realizar investigações. E em terceiro lugar, pretende-se promover atitudes, tais como a persistência e o gosto pelo trabalho investigativo (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 109).

Fazer uma avaliação da aula investigativa com registros escritos é imprescindível para o aprofundamento dos conteúdos. Para isso, os estudantes farão os registros de maneira explicativa, podendo, inicialmente, gerar certa estranheza, pois, normalmente, estão acostumados a responder de forma sintética e direta as atividades e exercícios, como siga o modelo. Nesse viés, a avaliação deve acontecer em duas etapas: individual e em grupo. O professor, informalmente, consegue observar o estudante que se destaca e aquele que tem certa dificuldade com conceitos e conjecturas estruturais matemáticas, podendo, em um segundo momento, fazer uma recomposição de um ou mais conceitos ainda não assimilados por ele, auxiliando-o na compreensão.

2.3 Cenários para investigação e cooperação investigativa

Afinal, qual o entendimento sobre a Matemática e sua função em sala de aula? Segundo Alrø e Skovsmose (2006, p. 21), "o propósito de ensinar Matemática é apontar erros e corrigi-los. Esse parece ser o entendimento comum sobre o que é Educação Matemática para muitos alunos".

Tal entendimento tem âncora nas aulas tradicionais, nas quais o Protagonismo é do professor (não do estudante). Alrø e Skovsmose (2006) exemplificam como é a prática de uma aula de Matemática tradicional: primeiro o professor apresenta a ideia e as técnicas, conforme o livro didático, em seguida, os estudantes executam os exercícios semelhantes e, por fim, o professor confere as respostas, caracterizando assim o **Paradigma do Exercício.** Este paradigma está diretamente ligado à organização das aulas, exercícios semelhantes às provas seletivas externas, que compõem o mundo do trabalho, no qual nenhum dos envolvidos faz parte da construção, tudo já vem pré-estabelecido.

A análise foi veiculada no ano de 2006, mas continua contemporânea, como já explicitamos em nosso texto. Também continua em voga que "o Paradigma do Exercício tem sido desafiado de muitas maneiras: pela resolução de problemas, proposição de problemas, abordagens temáticas, trabalho com projetos e etc." (Alrø; Skovsmose, 2006, p. 52). Nesse âmbito, busca oportunizar aos estudantes o desenvolvimento do pensamento crítico e intuitivo. Para tanto, devemos tratar a Matemática como algo a ser investigado, que não como algo "pronto e acabado".

Skovsmose (2014, p. 45-46)[5] define um Cenário para Investigação como:

---

[5] Pesquisador interessado especialmente em Educação Matemática Crítica. É Professor titular do Departamento de Educação, Aprendizagem e Filosofia, da Universidade de Aalborg, na Dinamarca.

> [...] um terreno sobre o qual as atividades de ensino-aprendizagem acontecem. Ao contrário da bateria de exercícios tão característica do ensino tradicional de Matemática, que se apresenta como uma estrada segura e previsível sobre o terreno, as trilhas dos Cenários para Investigação não são tão bem demarcadas. Há diversos modos de explorar o terreno e suas trilhas. Há momentos de prosseguir com vagar e cautela e outros de se atirar loucamente e ver o que acontece.

Para Alrø e Skovsmose (2006), é possível tentar abandonar o Paradigma do Exercício para se dedicar a um Ambiente de Aprendizagem distinto, os chamados **Cenários para Investigação**. Assim, os exercícios poderão ser substituídos e os estudantes passam a formular questões e planejar linhas investigativas, ou seja, eles podem participar do processo de investigação.

> Um Cenário para Investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. O convite é simbolizado pelo 'O que acontece se...?' do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus 'Sim, o que acontece se...'. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O 'Por que isso...?' do professor representa um desafio e os 'Sim, por que isso...?' dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio e que estão procurando por explicações (Skovsmose, 2000, p. 6).

De acordo com Skovsmose (2000), existe uma dicotomia entre o Paradigma do Exercício e os Cenários para Investigação: o primeiro são processos mecânicos, reproduzidos sem questionamentos. Já os Cenários para Investigação são passíveis de questionamentos e possíveis variações de resultados consoante a proposta de trabalho.

Skovsmose (2000) vai além, faz mais três separações relacionadas à abordagem das questões, são elas: Referência à Matemática pura, quando se trata apenas das técnicas envolvidas, diz respeito a grandezas, formas, operações tratadas de maneira abstrata; Referência à semirrealidade, quando as atividades se apresentam por meio de uma situação em um conceito hipotético idealizado somente para ilustrar a situação colocada, mas que não contribui ou influência na sua resolução, é um modelo de realidade fictícia; estamos nos referindo a qualquer informação externa ao exercício; para sua resolução, não é necessário elucidar os fatos. A semirrealidade é definida pelos autores Skovsmose (2014) como uma

É membro do comitê editorial das séries internacionais *Mathematics Education Library* e *Critical Essays in Education*.

realidade construída com base em conceitos e ferramentas matemáticas que não existem na realidade objetiva. Essa construção ocorre quando as ferramentas matemáticas são aplicadas a problemas ou situações que não correspondem completamente à realidade. A semirrealidade, portanto, é uma realidade parcialmente real e parcialmente construída. O único objetivo do exercício é resolvê-lo, desse modo, os estudantes chegam a uma única solução possível; e, por último, Referência à realidade na qual se tem dados reais, nela exploram-se as experiências da realidade dos educandos. Nesse prisma, observando o Quadro 6, podemos dizer que são seis ambientes sugeridos pelo autor.

Quadro 6 – Ambientes de Aprendizagens

	Paradigma de exercícios	**Cenários para Investigação**
Referência à Matemática pura	(1)	(2)
Referência à semirrealidade	(3)	(4)
Referência à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000)

O Ambiente de Aprendizagem tipo (1) diz respeito ao contexto da Matemática pura, com exercícios do tipo: a) reduza a expressão...; b) resolva a equação...; c) calcule..., exemplos recheados em livros didáticos. Os exercícios propostos pressupõem uma única solução possível e encontrada através de cálculos matemáticos. Não tratam de situações inventadas, nem decorrentes do mundo real, e sim de exercícios no enquadramento da “Matemática pela Matemática”.

Consoante Skovsmose (2014), o Ambiente de Aprendizagem tipo (2) num Cenário para Investigação leva os estudantes a questionar as relações existentes entre os conceitos abordados nas atividades, por exemplo, com números e figuras geométricas: o que acontece se girarmos a figura? Se trocarmos o número de ordem? Se transladarmos a figura? O panorama da Matemática pura permite trabalhar a criticidade diante do que é posto em aula, para que realizem as operações encontrar encontrando significado para as variáveis em questão.

O Ambiente de Aprendizagem tipo (3) se apresenta no Paradigma do Exercício baseado em situações imaginárias, uma realidade construída, em exercícios do tipo:

> Guilherme e Tiago compraram 200 figurinhas. Dessas, 36 foram rasgadas e não puderam ser aproveitadas. Das figurinhas restantes, Guilherme ficou com 20 a mais que Tiago. Com quantas figurinhas cada um ficou? (Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p. 153).

Essa situação é artificial, encontra-se numa semirrealidade, funciona como um mundo platônico em que todas as informações são precisas e suficientes, o professor recorre a situações que ocorrem no cotidiano, no entanto, sem apoiar-se em dados reais, para explorar conceitos matemáticos, para refletir acerca do contexto em que as situações são apresentadas.

O Ambiente de Aprendizagem tipo (4) também está disposto em uma semirrealidade, porém, toma forma de um Cenário para Investigação constituindo-se em um convite aos estudantes para explorar e explicar. Este ambiente é caracterizado por criar situações a serem investigadas, propicia que novas questões sejam levantadas e diferentes estratégias de resolução são consideradas relevantes.

Tomemos por exemplo:

> Numa lanchonete, um suco de laranja pequeno (300ml) é vendido por R$ 3,30 e um suco grande (500ml), por R$ 4,70. Supondo que os preços são proporcionais às quantidades de líquido no copo, calcule:
> a) Quanto custaria cada 100ml de suco de laranja se for comprado o suco pequeno?
> b) Quanto custará cada 100ml de suco de laranja se for comprado o suco grande?
> c) Quanto custaria o suco grande se seu preço fosse calculado proporcionalmente em relação ao volume do suco pequeno? (Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p. 123).

Este exemplo poderia ser explorado com grandes questionamentos: quem seriam os clientes desta lancheria? O suco é natural? É industrializado? Se for feito na hora, essas laranjas são provenientes da agricultura familiar? Ou de grandes produtores? Será que esse preço é justo pelo pagamento? Quem recebe é valorizado pelo seu trabalho?

O Ambiente de Aprendizagem tipo (5) utiliza situações reais, contudo, a solução não decorre de uma investigação, e sim da manipulação de regras matemática, com o objetivo de conscientizar questões socioeconômicas, aplicabilidade e desenvolvimento de conceitos matemáticos, com intuito esclarecedor da questão, elemento potencializador de conhecimentos.

O primeiro passo é identificar o problema a ser resolvido, aqui podemos dizer que existe uma relação muito próxima entre problema e investigação. As Investigações Matemáticas envolvem processos de raciocínio complexo e requerem empenho, criatividade pelo estudante, enquanto os problemas matemáticos caracterizam-se por dados e objetivos mais concretos, as investigações tem um ponto de partida muito menos definido. Nesse sentido, é viável, também, pensar a Matemática como algo que as pessoas fazem e não só como algo que as pessoas já fizeram.

O Ambiente de Aprendizagem tipo (6) faz referências à vida real, não é um projeto de fato, é uma atividade educacional com referências a vida real. As referências são reais, tornando possível os estudantes construírem diferentes significados para as atividades e não somente conceitos. Os estudantes exploram o problema, fazem cálculos e conjecturas relacionados à vida real, descartando, em razão disso, o Paradigma do Exercício. A ideia de que há uma, e somente uma alternativa certa, já não é mais aceita.

Nesse ambiente, o professor assume papel de orientador, prevalece a autonomia, o Protagonismo e o interesse dos estudantes, além de possibilitar a realização de atividades interdisciplinares. A reflexão crítica acerca da Matemática ganha um novo significado, os livros didáticos são “postos de lado”; não existe uma única solução, há uma construção em torno das reflexões e novos conceitos desenvolvidos.

Um Cenário Investigativo é um chamado para que os estudantes circundem esse processo, entretanto, só será explícito quando, de fato, o estudante der seu aceite ao chamado. Mesmo o professor apresentando um cenário que para ele seja atrativo, faz-se necessária a aceitação dos estudantes para que se sintam participantes e atuantes neste processo.

Skovsmose (2014, p. 60) define que:

> Investigar e explorar são atos conscientes, eles não acontecem como atividades forçadas. Eles não se realizam enquanto os alunos efetivamente não fizerem as investigações e as explorações e, para isso, pressupõe-se que a intencionalidade dos alunos faça parte do processo investigativo.

Para Alrø e Skovsmose (2006), um processo investigativo não pode ser uma atividade compulsória, pressupõe a participação dos envolvidos e deve ser um processo aberto, de forma que a “aprendizagem como ação” e a “aprendizagem como investigação” combinem muito bem. Logo, os estudantes precisam aceitar este convite para serem condutores e participantes ativos no processo.

Tanto o professor quanto os estudantes poderão ser surpreendidos com dúvidas, pois não terão mais fórmulas, conjecturas a serem seguidas, o conforto passa a ter uma interpelação ao risco. Cada cenário explorado traz desafios ao professor. A solução não é retornar à zona do conforto do Paradigma do Exercício, mas operar num novo ambiente.

A tarefa é permitir que estudantes e professores trabalhem juntos na zona de risco. Isso significa, por exemplo, aceitar perguntas como "e se..." que podem levar à exploração do território desconhecido, é importante que os professores se sintam aptos a trabalhar nesse desafio, criando novas formas de colaboração, principalmente entre professores, mas também junto aos estudantes. Nessa esteira, os estudantes começam a fazer hipóteses, a organizar dados, a formular conjecturas e suas afirmações, finalizando com a justificação e avaliação de todo o trabalho em si.

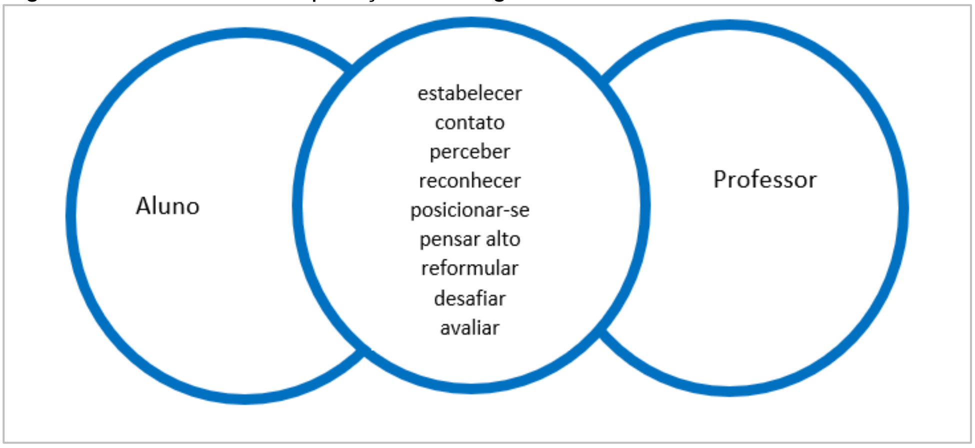
As aulas de Matemática passam a ter um diferencial quando desenvolvidas em outros Ambientes de Aprendizagem. É relevante que professores e estudantes encontrem caminhos juntos, em diferentes Ambientes de Aprendizagem, refletindo sobre o percurso percorrido para analisar e resolver alguma situação, identificando ambientes em que tiveram as experiências mais bem sucedidas, pensando nas dificuldades em mover-se de um ambiente ao outro.

No processo investigativo, não está em votação a questão do certo ou do errado, é preciso avaliar as perpectivas e analisar essas novas aprendizagens. O professor se sentirá desafiado neste novo modelo, pois precisa sair de uma zona de conforto para uma zona de riscos, é preciso ser hábil (Skovsmose, 2000). Alrø e Skovsmose (2006) ainda propõem que um Cenário para Investigação evidencia a necessidade de formular conhecimentos matemáticos, tecnológicos e reflexivos, desenvolvendo a cidadania nos estudantes. Desse ponto de vista, vale a pena observar que as aulas de Matemática não podem se basear num monólogo de conteúdos por parte do professor. Carecemos considerar que a comunicação em sala de aula contribuiu significativamente à construção de conhecimentos, pelo professor e pelos estudantes.

A comunicação é um elemento significativo em sala de aula, na perspectiva investigativa, promove uma relação dialógica entre estudante e professor. Alrø e Skovsmose (2006) sugerem um modelo de Cooperação Investigativa (MODELO-CI) que enfatiza a ligação entre a qualidade das interações professor-estudante e a aprendizagem. A ideia principal deste modelo é que a qualidade da comunicação na sala de aula afeta as características da aprendizagem da Matemática e, ao fazê-lo, seleciona certos elementos que facultam a mudança de comportamento, como contato, observação, reconhecimento, posicionamento, pensamento alto, reformulação, desafio e avaliação. Nesse modelo de CI, os principais elementos são mobilizados em processos interativos a partir dos desafios matemáticos.

No modelo de Cooperação Investigativa, a comunicação entre estudantes e professor é recheado de objetivos ao ato investigativo, como estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar, tal como pode ser visualizado na figura a seguir:

Figura 2 – Modelo de Cooperação Investigativa



Fonte: Alrø e Skovsmose (2006, p. 69)

A Figura 2 colabora para que possamos elucidar algumas ações, quais sejam: **estabelecer contato** significa frisar uma relação com sintonia, condição primeira para inestigação, o professor conseguirá **perceber** as perspectivas do estudante, fazendo uma análise de como interpreta o problema, assumindo a função de facilitador, nesse processo; **reconhecer** é algo grandioso para o professor, precisa identificar que ação o estudante utilizará para suprir as necessidade emergentes ali dispostas. Ao **se posicionar**, expressará argumentos de defesa do seu ponto de vista, defendendo sua posição para uma ação maior de conhecimento frente a um grande grupo. Também, como ponto de grande relevância, é a ação de **reformular**, até mesmo as questões propostas pelo professor, processo que auxilia no entendimento do problema a ser estudado. O **desafiar** envolve tanto professor quanto estudante, culminando no ato de se **avaliar**, o ato de avaliar não exime o professor, ambos precisam chegar a um questionamento dos fatos e não se colocar fora destes (Alrø; Skovsmose, 2006).

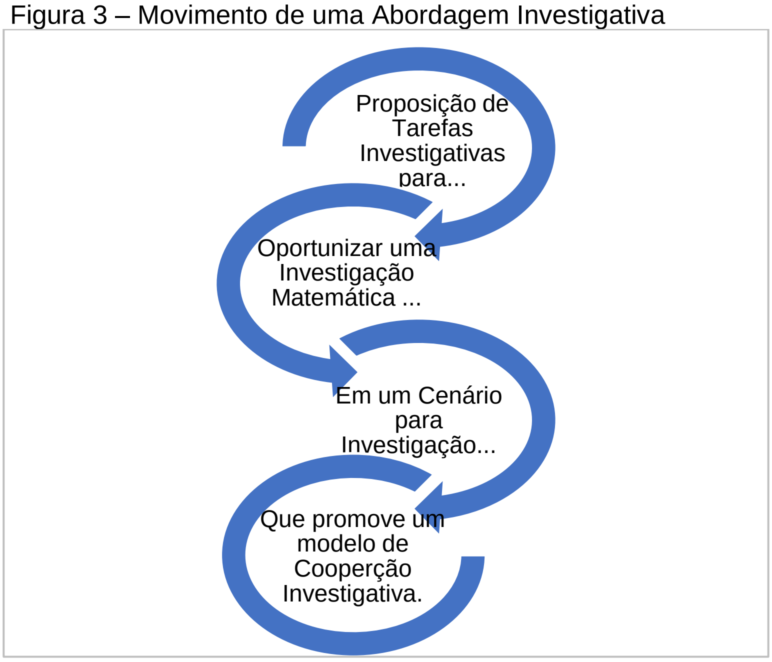
Por fim, é fundamental demarcar que, no espaço escolar, encontramos muitos obstáculos à Cooperação Investigativa, de forma que vivenciamos algo oposto ao que é possível em um Cenário Investigativo, consoante um Modelo de Cooperação Investigativa (CI).

O cotidiano das escolas indica que professores e estudantes já estão acostumados a tratar questões do tipo perguntas, explicações corretas e corrigir os erros. O caráter de interpretação não é algo vivenciado nos bancos escolares e ainda dispersa o interesse dos estudantes. Estes já estão acostumados a esperar pela sugestão do professor para começar, qual conteúdo seguir e como resolver, ao mesmo tempo, não mostram suas opiniões, talvez até para não dar maiores explicações e argumentações do que pensam e tentam explanar. Não vivenciam a comunicação verbal, alguns têm receio de se expor e mantêm-se calados.

São questões que ilustram algumas dificuldades em construir uma Matemática Investigativa em sala de aula. Então, nosso empenho é também apresentar possibilidades para que os professores e os estudantes possam “vencer” o Paradigma do Exercício, colocando a ótica investigativa como um instrumento de aprendizagem, com cooperação e dialogicidade, tendo o estudante como protagonista na ação.

Por fim, a partir da reflexão proposta, que tem âncora teórica no campo da Educação Matemática, no prisma investigativo e crítico, em diálogo com os autores Alrø e Skovsmose (2006); Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, 2009); Ponte (2022); Skovsmose (2014), podemos sistematizar o “movimento” de uma abordagem investigativa em sala de aula, conforme Figura abaixo:

Figura 3 – Movimento de uma Abordagem Investigativa



Fonte: Elaborado pela Autora (2023)

Nessa direção, propor Investigação Matemática em sala de aula pressupõe “um provocar-se” como professor, o desafio é estar em um novo ambiente, permitindo a troca e a construção de conhecimento entre os envolvidos, cada vez mais dando espaço aos “e se...”. Os resultados são interpretados, os estudantes podem trabalhar em grupos cooperativos, trocar ideias, questionar as interpretações uns dos outros e avaliar suas conclusões.

Passaremos assim, na próxima seção, a conhecer uma proposta de pesquisa para pensar em como os estudantes do Ensino Fundamental estruturam a exploração, as conjecturas e a justificação, ao participarem de uma atividade de Investigação Matemática que tematiza a Álgebra por meio de padrões e regularidades. Antes, porém, traremos as informações metodológica que balizaram o desenvolvimento desta pesquisa.

3 OS CAMINHOS DA PESQUISA

Segundo D'Ambrósio (2001, p. 19-20), a pesquisa é "inerente a ação, que é inerente a vida", complementa ainda, "pesquisa é o resultado de identificar os fatores que permitem a continuidade do modelo social e observar, analisar e interpretar as consequências". Pesquisar nos proporciona a investigação e/ou conhecimento aprofundado de algo relevante para a sociedade, considerando a teoria e a aplicação das técnicas que nortearão esse trabalho, os resultados objetivam encontrar respostas para a melhoria do processo em questão, de maneira a produzir novos conhecimentos.

Nesse sentido, Minayo (2002, p. 17) reforça essa ideia:

> Entendemos por pesquisa a atividade básica da ciência na sua indagação e construção da realidade. E a pesquisa que alimenta a atividade de ensino e a atualiza frente a realidade do mundo. Portanto, embora seja uma prática teórica, a pesquisa vincula pensamento e ação. Ou seja, nada pode ser intelectualmente um problema se não tiver sido, em primeiro lugar um problema da vida prática.

Por meio da metodologia, traçamos o percurso da pesquisa proposta.

A pesquisa desenvolvida, quanto à sua natureza, possui cunho qualitativo, resultando em uma pesquisa de campo, que permitiu uma aproximação entre o trabalho e a pesquisadora. Os dados coletados foram utilizados de forma descritiva, com preocupação na compreensão ao processo. Reforçando a ideia de Minayo (2002 p. 52): "Assim, o trabalho de campo deve estar ligado a uma vontade e a uma identificação com o tema a ser estudado, permitindo uma melhor realização da pesquisa proposta, gerando novos conhecimentos".

Quanto aos objetivos, foi realizada uma pesquisa exploratória e descritiva, visando conhecer e descrever as características de um determinado fato ou fenômeno. Para Gil (2002, p. 41), "pesquisa exploratória tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses, inclui levantamento bibliográfico e entrevistas". O mesmo autor ressalta que o estudo descritivo tem como objetivo fundamental o detalhamento das características de determinada população ou fenômeno.

3.1 Detalhando o percurso: sujeitos da pesquisa

Desenvolvemos a pesquisa em uma Escola Estadual pertencente ao Noroeste do Rio Grande do Sul, da zona urbana. O município conta com oito instituições que contemplam o Ensino Fundamental. Desse modo, primeiramente, consultamos, via WhatsApp, as equipes diretivas, acerca da intenção em fazerem parte desta pesquisa, posteriormente, sorteamos a escola. Este sorteio foi feito junto com a orientadora, Profa. Dra. Luci T. M. dos Santos Bernardi.

O estudo de campo foi executado com um grupo de estudantes do sétimo ano, por ser neste ano que se apresenta o estudo de Equações Algébricas, de forma que o universo da pesquisa representou todos os adolescentes da turma e escola sorteada.

Minayo (2002, p. 48) assevera que, para obtermos uma boa amostra qualitativa é importante observarmos a escolha do local e do grupo:

> [...] quantas instituições ou sujeitos serão envolvidos na pesquisa? [...]; quais indivíduos sociais tem uma vinculação mais significativa para o problema a ser investigado? [...] a boa seleção dos sujeitos ou casos a serem incluídos no estudo é aquela que possibilita abranger a totalidade do problema investigado em suas múltiplas dimensões.

Para organizarmos a amostra, alguns critérios foram considerados, dentre eles: o estudante ter disponibilidade, interesse e autorização dos responsáveis para participar da atividade, que ocorreu no turno inverso ao da aula. O propósito era organizar um grupo de, no máximo, seis estudantes participantes nos encontros, uma vez que precisávamos fazer gravações, inviabilizando a participação de um número maior de estudantes.

Os critérios de inclusão da presente pesquisa foram: estudantes do sétimo ano da Escola de Ensino Fundamental sorteada para o estudo, cujos pais ou responsáveis autorizassem a participação, mediante a assinatura do Termo do Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Nesse âmbito, realizamos quatro encontros (a, b, c, d); participaram desta pesquisa seis estudantes (E1, E2, E3, E4, E5, E6). Desses seis participantes, dois meninos e quatro meninas, idade entre 13 e 14 anos, todos residentes na área urbana do município.

Para a identificação dos estudantes-participantes, optamos por representá-los pela letra E, maiúscula, juntamente com o número, que foi designado conforme a ordem de fala dos estudantes, ou seja, quem produziu a primeira assertiva recebeu o número 1, e assim sequentemente. Dado que as atividades foram desenvolvidas em diferentes dias, as letras em minúsculo, logo após o número, e em ordem alfabética, representam os dias das atividades. Ademais, quando somente consta a letra E, em maiúsculo, representa situações em que todos os estudantes produziam enunciados.

As contribuições dos estudantes, na pesquisa de Investigação Matemática, certamente enriqueceram o estudo e mostraram seu interesse e conhecimento nessa área. Além disso, foi uma maneira de desenvolver habilidades matemáticas em um ambiente estimulante. Outrossim, foi e é gratificante vê-los engajados e colaborando ativamente durante o processo de pesquisa, compartilhar e promover a oportunidade de um aprendizado significativo. Os estudantes que participaram da pesquisa puderam contribuir com suas ideias únicas, resolução de problemas e pensamento crítico. Outrossim, essa experiência pôde ajudá-los a aprofundar seu interesse pela Matemática e a construir conhecimentos importantes para seu processo formativo e sua vivência como cidadão.

3.2 Cuidados éticos

No que tange às questões éticas, foram respeitados, em todas as etapas de execução deste estudo, os preceitos recomendados pela Resolução 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde (CNS) do Brasil, que trata das Diretrizes e Normas Regulamentadoras de Pesquisa em Seres Humanos.

As garantias e autorizações estão expressas em documentos específicos, incorporados ao projeto de pesquisa encaminhado e aprovado, conforme parecer do Comitê de Ética da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI, sob o número 68884023.9.0000.5352, em 16 de maio de 2023, ficando os dados e documentos sob responsabilidade da pesquisadora, por um período de cinco anos, cumprindo os critérios éticos e legais[6].

Foram utilizados, para o estudo, os seguintes termos: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), voltado para pais e/ou responsáveis; Termo de Consentimento de uso de imagem e voz (por se tratar de alunos de 13 a 14 anos,

[6] As garantias e autorizações estão nos seguintes documentos: Termo de Autorização Institucional, Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para pais ou responsáveis dos participantes menores de 18 anos com o assentimento dos menores; e a Declaração de Ciência e Concordância.

menores de idades), e a Declaração de Ciência e Concordância da instituição envolvida.

Levando em consideração os princípios éticos da pesquisa, os participantes tiveram suas identidades preservadas, sendo nomeados no decorrer do trabalho como E1, E2, e assim sucessivamente, de acordo com a ordem de gravação. As atividades de campo foram gravadas e transcritas na íntegra e os participantes puderam revisar os textos transcritos.

Aos estudantes participantes foi garantido o anonimato, o sigilo, o direito de desistir da participação na pesquisa sem ônus, bem como o livre acesso aos dados quando de seu interesse. Os dados ficarão sob a responsabilidade da pesquisadora, por um período de cinco anos e após serão descartados, seguindo os critérios da Resolução n. 466/2012 (Brasil, 2012).

Destacamos, ainda, que os participantes da pesquisa não tiveram ônus/despesas de qualquer natureza, os encontros grupais aconteceram no turno oposto em que estudavam, os instrumentos para a coleta de dados e um lanche eram ofertados ao final de cada encontro, sob a responsabilidade da pesquisadora.

A pesquisa não apresentou riscos aos participantes. Os benefícios somados pela pesquisa podem ser relacionados à importância dos conhecimentos oportunizados através das práticas investigativas com enfoque matemático no ensino de Álgebra, sendo um fator relevante para a continuidade do processo ensino e aprendizagem ao qual estão inseridos com enfoque teórico e prático no cotidiano escolar.

Ao término da pesquisa, os resultados obtidos serão retornados aos participantes por meio de um relatório que será emitido pela pesquisadora.

3.3 O ambiente de aprendizagem proposto: coleta da materialidade empírica

O Ambiente de Aprendizagem proposto nesta pesquisa, considerando nosso objetivo, teve o intuito de analisar como os estudantes do Ensino Fundamental estruturam a exploração, as conjecturas e a justificação ao participarem de uma atividade de Investigação Matemática que tematiza a Álgebra por meio de padrões e regularidades. A construção da materialidade empírica foi realizada através de exercícios práticos com esses estudantes, pretendendo avaliar como participam de uma atividade investigativa de Matemática, de modo que se constituiu como uma atividade de campo de estudo de caso.

Segundo Gil (1995, p. 58), o estudo de caso segue quatro fases: “a) delimitação da unidade-caso; b) coleta de dados; c) seleção, análise e interpretação dos dados; d) elaboração do relatório”. Na primeira fase, delimita-se o caso e identificam-se os dados necessários para a compreensão dele. A coleta de dados pode ser feita mediante observações, análise de documentos, entrevista formal ou informal, história de vida, aplicação de questionário, levantamentos de dados, análise de conteúdo etc. A terceira fase tem como objetivo selecionar, interpretar e identificar quais dados devem ser considerados. E, na fase final, é feita a laboração dos relatórios parciais e finais.

O estudo de caso proposto caracterizou-se pela organização de um Ambiente de Aprendizagem que oportunizasse a um grupo de estudantes participarem de uma Investigação Matemática. Para tanto, efetivou-se por meio de encontros semanais, em turno inverso ao das atividades escolares, no próprio espaço escolar.

Organizamos os estudantes em pequenos grupos aleatórios e registramos, com fotografias e gravação de voz, os momentos das aulas, para posterior transcrição escrita. A pesquisa se deu em quatro encontros, consoante podemos visualizar no quadro a seguir:

Quadro 7 – Descrição dos Encontros com a referida Proposta

Encontro	Cenário para Investigação	Proposta /Prática
1º	(2) Referência à Matemática pura	Torre de Hanói x Álgebra
2º	(2) Referência à Matemática pura (4) Referência à semirrealidade	Torre de Hanói x Álgebra Jogo de varetas x Pensamento Algébrico
3º	(4) Referência à semirrealidade	Situações-Problemas x livro didático
4º	(6) Referência à realidade	Pesquisa de matérias escolares x contextualização com a prática

Fonte: Organizado pela autora (2023)

Nos encontros, os estudantes tiveram acesso a situações-problemas, envolvendo o conteúdo de Álgebra, e fizeram várias suposições e possibilidades de resolução que julgaram necessárias. As informações recolhidas serviram para contextualização do estudo.

As atividades foram organizadas com base no aporte teórico desenvolvido nas seções anteriores, a partir de quatro etapas – a) **exploração e formulação de questões**: reconhecer uma situação problemática, explorar a situação problemática e formular questões; b) **conjecturas:** organizar dados, formular conjecturas e fazer afirmações sobre uma conjectura; c) **testes e reformulação**: realizar testes e refinar uma conjectura; d) **justificação e avaliação**: justificar uma conjectura, avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

3.4 Um diálogo com os dados: a construção de categorias de análise

O corpus[7] de análise desta pesquisa constituiu-se pela transcrição das falas gravadas no decorrer das atividades durante o estudo de campo. Dessa forma, os dados levantados foram trabalhados e analisados depois da coleta, de acordo com o método de Análise Textual Discursiva (ATD) proposto e definido por Moraes e Galiazzi (2016).

A ATD é uma abordagem de análise de dados que transita entre análise de conteúdo e a análise do discurso. Moraes (2003, p. 191-210) reforça essa metodologia quando afirma:

> Pesquisas qualitativas tem cada vez mais se utilizado de análises textuais. Seja partindo de textos já existentes, seja produzindo o material de análise a partir de entrevistas e observações, a pesquisa qualitativa pretende aprofundar a compreensão dos fenômenos que investiga, a partir de uma análise rigorosa e criteriosa desse tipo de informação, isto é, não pretende testar hipótese para comprová-las ou refutá-las ao final da pesquisa; a intenção é a compreensão.

Consoante Moraes e Galiazzi (2006), a ATD tem, no exercício da escrita, uma ferramenta mediadora na produção de significados, passando de uma análise empírica para a abstração teórica, que constitui o entendimento da ciência, aprofundada pelo esforço do pesquisador em interpretar e produzir argumentos para a (re)construção de caminhos, como objetos de pesquisa, a partir do contexto que investiga.

Para os autores, exploramos a ATD obedecendo quatro etapas:

> I- <u>Desmontagem dos textos:</u> também chamado de processo de unitarização, resulta na examinação dos textos em seus pormenores, fragmentando-os no sentido de produzir unidades constituintes, enunciados referentes aos fenômenos estudados;

7 “Toda análise textual se concretiza a partir de um conjunto de documentos denominado corpus. Esse conjunto representa as informações da pesquisa e para a obtenção de resultados válidos e confiáveis, requer uma seleção e delimitação rigorosa [...]” (Moraes, 2003, p. 194). O corpus é a matéria-prima, é constituído essencialmente de produções textuais.

> II- <u>Estabelecimento de relações:</u> este processo é denominado de categorização e envolve construir relações entre as unidades de base, combinando-as e classificando-as, reunindo esses elementos unitários na formação de conjuntos que congregam elementos próximos, resultando as categorias;
> III- <u>Captação do novo emergente:</u> esse corresponde ao último processo do ciclo de análise. O metatexto resultante desse processo representa um esforço de explicitar a compreensão que se apresenta como produto de uma combinação dos elementos construídos ao longo dos passos anteriores;
> IV- <u>Um processo auto-organizado:</u> a partir do processo auto-organizado emergem as compreensões. Os resultados finais, criativos e originais, não podem ser vistos. Mesmo assim é essencial o esforço de preparação e impregnação para que a emergência possa concretizar-se (Moraes; Galiazzi, 2016, p. 33-34).

Em síntese, a primeira etapa da análise compreendeu a leitura do corpus e o exame dos textos em seus detalhes, identificando as respostas semelhantes e fragmentando-as, constituindo as unidades significantes. Na segunda etapa, foram construídas as relações entre as unidades de significado, combinando-as e classificando-as, reunindo esses elementos unitários na formação de conjuntos que congregam elementos próximos, resultando daí as categorias, cuja opção foi por um *design* emergente.

As categorias emergentes foram construídas a partir do método indutivo, que implica comparação e contratação constantes entre as unidades de significados. Envolve conhecimentos tácitos ou teorias implícitas, teorias implicadas nas informações e no próprio conhecimento do pesquisador cuja tarefa é explicitá-las.

Apresentamos no Quadro 8, as categorias emergentes. O desenvolvimento detalhado dessa etapa está organizado no Apêndices – Unidades de Significados: Categorias.

Quadro 8 – Categorias Emergentes

(continua)

Unidades Constituintes	**Unidades de Significado**
CATEGORIA: ACEITANDO O CONVITE À EXPLORAÇÃO: PRIMEIRAS PROVOCAÇÕES	
E1, a: Tá bugado o cérebro. E4, a: Tem que desmanchar tudo de novo, pra pôr o verde embaixo? E4, a: Só falta ter letras negativas. E4, b: Eu não sei fazer as contas de Álgebra. E4, b: Eu não estou entendendo nada, eu estou entendendo um pouco. E5, b: Profe não tem um jeito mais fácil? será que é 2 no expoente -? E 2, c: Profe então agora tem que fazer dois virgula quatro menos sete e o resultado divide por cinco? E6, d: Não resolvendo. Pensando. Chorando, pensando. As vezes tem coisa que não tem solução.	Encontrar uma resposta

Quadro 8 – Categorias Emergentes

(continuação)

Unidades Constituintes	**Unidades de Significado**
CATEGORIA: ACEITANDO O CONVITE À EXPLORAÇÃO: PRIMEIRAS PROVOCAÇÕES	
E2, a: Ninguém para mexer. Não pode, não é a regra. Qual que era a regra? A gente tem que inverter, porque o azul é o primeiro. Esse daqui é o primeiro. E2, a: A letra não muda nada, o que muda é os números. Não muda a conta. Pode ser negativo, ou não. E1, a: Pressão, glicose, temperatura, vitamina D. E2, c: Tem que ler, tem que entender tem que resolver. Matemática e leitura. E4, c: Mas se o Henry tivesse cinco notas de cinco? É uma expressão algébrica, é ou, não é? E6, d: Por dois, multiplica por dois..., isso é uma expressão? E5, d: Um copo de leite. Um copo de leite. Coisas. Organizar as coisas. Medidas. Dívidas. É o que? (...falando sobre o uso da Matemática). E2 d: Eu escolheria o primeiro que é cheio de coisa. O meu resultado eu fiz mais ou menos tentando botar o material para que pra mim faltava, e deu certo.	Construir um caminho
CATEGORIA: POSTURA INVESTIGATIVA	
E4, a: Não pode deixar que falte nenhum espaço. E6, a: Não precisa. Botar rosa primeiro, tem que mover, marrom primeiro embaixo de rosa certo? Estou arrumando não.... É, eu acho que eu tive uma ideia, eu acho. A gente tira o marrom. Põe o rosa, aí. É raciocínio. E6/E2, a: E a quantidade de peças influenciando os movimentos. Aqui é Álgebra, Matemática. É Álgebra, é matemática, Álgebra tem Álgebra junto, né? E4, a: Uma de cada vez, não pode colocar uma maior em cima de uma menor E5, a: Poe o azul aqui em cima... Não dá para botar assim, se não ficar errado. Mas agora. E 3, a: Tira esse aqui, esse aqui vem pra cá, ó. ...embaixo do laranja, fazendo agora, é possível. Aham. Ai meu Deus, agora ... Quando a gente pensa que está acabando, a gente é se complica mais antes de veio aqui. Aqui vem aqui E 2, a: Pera aí, que aí vai um de cada vez. Uma de cada vez, oh, tem que ser esse aqui. Laura, isso tem que ser aqui. Espera, tem que ser. E6, b: Torre de Hanói e a Matemática, entendi que: X número de peças igual a X número de movimentos, né! E1, c: Já tenho uma estratégia que vai passar demais.	Desafios na busca de solução
E6, a: Quanto mais vai montando, vai modificando, tipo, o número de peças. E2, b: Imagina 64 pecinhas? Como eles fizeram? E se nós começar assim? O dobro de três é seis mais um é sete. O dobro e o dobro de quatro? Alguém tem que contar. E2, b: Porque o 1 não é primo nem composto, então não pode ser. E3, b :Se nós pegarmos 2 ao quadrado dá 4, três ao quadrado da 9, se eu pegar 2 no expoente 3 dá 8, se eu pegar 2 no expoente 4, dá 16. Então só potência não serve, então vamos ter que fazer + alguma coisa ou menos alguma coisa. 76.4 no expoente 3 dá 31? O N é o expoente? E o M é o que? O que é a base?	Caminhada: o que acontece se?
E6, a: O seguinte, este faço verde para cá, aí. Ai, ai, ai. A gente tem que colocar aqui. Como é que eu vou colocar o rosa? Não vou colocar assim também. Pode, é? Não sei... Então tá. E1, a: Quantos movimentos deu? Eu não contei, quais são as regras do jogo? E1, b: Cento e cinco de novo. Cento e cinco. As vermelhas valem dez, né? Sim. E essas dois valem vinte e cinco. E 2, b: Isso é Álgebra, quando misturamos letras, números. Agora vamos jogar varetas? Tem que tirar todos e não pode mexer as outras. E5, b: Tira esse aqui, esse aqui vem para cá, ó. ...embaixo do laranja, fazendo agora, é possível. Aham. Ai meu Deus, agora ... Quando a gente pensa que está acabando, a gente é se complica mais. E 4, b: Tem que desmanchar tudo de novo, pra. Pra pôr o verde embaixo? E 2, b: Pera aí, que aí vai um de cada vez. Uma de cada vez, oh, tem que ser esse aqui. Laura, isso tem que ser aqui. Espera, tem que ser. É. E2, b: Meu Deus do céu. É melhor ficar tentando.	Avaliar e analisar

Quadro 8 – Categorias Emergentes

(conclusão)

Unidades Constituintes	Unidades de Significado
CATEGORIA: POSTURA INVESTIGATIVA	
E2, b: Alguma coisa aí que eu não estou? Não. Estou fazendo certo. 24 vocês já estavam? Sim, se não se perderam. Ter que ver agora, agora, agora. E 2, c: Não é oito vezes seis que dá quarenta e oito? E daí a gente tem que botar uma vírgula, daí vai sobrar, agora vírgula... Dois, que dá dezesseis. Quatro. Já. Agora.	Avaliar e analisar

Fonte: Organizado pela autora (2023)

Na sequência, posto o que apontam Moraes e Galiazzi (2016), a captação do novo emergente abrangeu a análise dos momentos anteriores. Assim, emerge o metatexto como último elemento deste processo cíclico de análise, com o investimento na comunicação dessa nova compreensão, bem como de sua crítica e validação. O metatexto resultante desse processo representa um esforço de explicitar o entendimento que se apresenta como produto de uma nova combinação dos elementos construídos ao longo dos passos anteriores.

Na concepção de Moraes (2003), nessa fase, é possível uma análise qualitativa de textos, da qual surge uma produção de metatextos que pode ser descrita como um processo emergente de compreensão, iniciando-se com um movimento de desconstrução, por meio do qual os textos do corpus são fragmentados e desorganizados, seguindo, assim, um processo de auto-organização, de reconstrução, com uma emergência de uma nova compreensão.

As condições para as emergências das novas compreensões são criadas a partir das reconstruções. Moraes e Galiazzi (2016) alertam que, nesse momento, o pesquisador precisa estar alerta ao *flash* de luz ocasionado pela tempestade para poder captar os elementos essenciais da paisagem. Esse exercício atento às tempestades consiste na construção dos metatextos, é então que entram, gradativamente, o olhar e a postura crítica do pesquisador, com o objetivo de validar sua pesquisa.

A ATD auxilia no entendimento dos fenômenos estudados, porém, os *insights* e teorizações não são construídos apenas através da racionalização, pois também recebem auxílio do processo auto-organizado, partindo da impregnação das informações do corpus em análise. Com base na metáfora da tempestade de luz, é possível demonstrar como acontece o processo analítico de compreensão dos fenômenos estudados (Moraes; Galiazzi, 2016).

Nesse rumo, a análise de dados está organizada em três etapas. Na primeira etapa, a seção 4, alicerçada no aporte teórico que fundamenta essa pesquisa, apresentamos caminhos para o desenvolvimento de Investigação Matemática em sala de aula, perpassando os diferentes Ambientes de Aprendizagem, mediante atividades que exploraram a Álgebra perante padrões e regularidades, provocando o deslocamento do Paradigma do Exercício para um Ambiente de Aprendizagem que promova o Cenário para Investigação.

Na próxima seção, intitulada **Episódios Investigativos: um diálogo com os estudantes**, trazemos uma análise longitudinal, na forma de episódios. A descrição das atividades investigativas desenvolvidas, em três ambientes distintos: o Ambiente de Aprendizagem (2), através de jogos, com Referência à Matemática pura; o Ambiente de Aprendizagem (4), explorando situações-problemas dos livros didáticos, com relação à semirrealidade; e o Ambiente de Aprendizagem (6), com a pesquisa de materiais escolares e posterior manipulações e comparações de informações trazidas, com Referência à realidade.

Na terceira etapa, **Movimento Investigativo**, desenvolvemos uma análise transversal, apoiada nas categorias emergentes da ATD – Aceitando o convite à Exploração: primeiras provocações e Postura Investigativa. Na sequência, as relações dessas categorias com a qualidade do diálogo estabelecido, defendendo que a Cooperação Investigativa mobiliza o Protagonismo dos estudantes.

4 ÁLGEBRA: ELEMENTOS PARA UMA PROPOSTA INVESTIGATIVA

Nesta seção, buscamos explicitar o que é Álgebra e a intencionalidade de ensiná-la na Educação Básica, a partir de um estudo bibliográfico e da mirada em alguns documentos orientadores da educação brasileira. Com esses elementos, tencionamos traçar caminhos para desenvolver a Investigação Matemática na Sala de Aula.

Por meio do raciocínio algébrico, os estudantes desenvolvem não apenas a capacidade de trabalhar com cálculos algébricos, mas também a capacidade de processar os componentes da Matemática, aplicando-os a vários conceitos. Pensando em colaborar com o fazer matemático em sala de aula, está pesquisa também busca contribuir com o desenvolvimento da Álgebra no cotidiano dos bancos escolares, uma vez que os estudantes, em sua maioria, apresentam dificuldades na resolução de problemas algébricos.

A Álgebra desempenha um papel importante na Educação Matemática. Uma visão mais tradicional combina o ensino algébrico com a conversão de expressões (monômios, polinômios, frações algébricas, radicais) para as equações e processos de resolução de problemas. Esta noção é bastante redutora da Álgebra. Em sala de aula, os estudantes resolvem, basicamente, exercícios e tarefas relacionados à transformação de expressões e aplicação de regras e procedimentos. Essa perspectiva reducionista leva a um ensino mecanicista e a uma aprendizagem sem sentido. Como resultado, a maioria dos estudantes tem uma imagem fortemente negativa da Álgebra, especialmente das equações. Frequentemente, relatam que não entendem como é possível combinar letras e números e cometem vários erros ao resolver as tarefas propostas, o que indica uma compreensão reduzida do que estão fazendo.

Nesse viés, uma proposta investigativa visa dar atenção especial às variáveis e invariantes envolvidas em uma situação matemática. Resolver situações-problemas pode fornecer trabalho para diferentes áreas da Álgebra, como o uso de incógnitas, o trabalho com variáveis, generalização e investigação. A abordagem para estuda-la se concentra na assimilação de representações diferentes, expressa em linguagem algébrica, como uma tabela de valores, um diagrama relacional com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico: compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações e estruturas matemáticas, usando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e entender relações quantitativas; analisar mudanças em diferentes contextos.

Numa abordagem investigativa, em que tarefas desempenham um papel de destaque na busca e pesquisa, os estudantes criam conhecimento a partir das tarefas que lhes são sugeridas e da discussão de seu trabalho. Este é um claro contraste com as abordagens nas quais o professor apresenta a informação sistematicamente, em que estes devem, posteriormente, memorizá-la através da prática repetida de exercícios.

4.1 Afinal, o que é Álgebra?

Começaremos por definir Álgebra:

> Trata-se do ramo da Matemática que testa e comprova as operações básicas e as relações entre conjuntos numéricos. Álgebra é o ramo da Matemática que generaliza a aritmética. Isso significa que os conceitos e operações provenientes da aritmética (adição, subtração, multiplicação, divisão etc.) serão testados e sua eficácia será comprovada para todos os números pertencentes a determinados conjuntos numéricos (Silva, 2016).

A partir de leitura de Eichenberger Neto (2016, p. 68), entendemos que Álgebra, em geral, é a ciência das equações. Quando não sabemos o valor de uma quantidade, chamamos de “x”. É uma extensão do pensamento aritmético que desenvolvemos em nossa busca para expandir o senso de números. Em outras palavras, a Álgebra é considerada como o ramo matemático da resolução de problemas, usando símbolos exatos para produzir resultados matemáticos. Conhecer, compreender e saber usar a Álgebra é uma habilidade importante para todos, seja para ter um bom desempenho em sala de aula ou para usá-la no dia a dia. É um tema que aguça o poder de raciocínio das pessoas, ajudando a resolver certas dificuldades de forma concisa e sistemática.

Uma situação típica da vida cotidiana é o cálculo do custo total. Consideremos a quantidade e o custo unitário. Se o custo do produto, por exemplo, for R$ 100,00, para comprar oito unidades, o custo total será: 8 x100 reais = R$ 800,00. No entanto, o custo nem sempre é o total calculado. Às vezes, depois de consultar o preço unitário fornecido, decidimos a quantidade de acordo com o quanto podemos gastar para obtê-lo. Se podemos gastar apenas R$ 500,00 em determinado mês, teremos de resolver a equação **X** x 100 reais = 500,00 reais, o valor que encontramos para **X** nos dirá quantos produtos podem ser comprados.

Olhando para a história da Álgebra, observamos que foi necessário construir uma linguagem simbólica adequada aos problemas em discussão, resultando em conceitos algébricos cada vez mais abstratos. Assim, se estabeleceu como um assunto de competência. Portanto, um produto do desenvolvimento histórico e não nativo do homem. Quer dizer, o conhecimento algébrico precisa de um ambiente social para aprendizado e aquisição. Conforme nossa estrutura social, a escola, ou mais precisamente a disciplina de Matemática, é a responsável por ensiná-la.

> A Álgebra faz parte do desenvolvimento humano e, como tal, surge inicialmente para resolver necessidades práticas, estando bastante presente em nosso cotidiano de várias formas. Por isso, e como não poderia deixar de ser, ela é parte essencial no ensino de Matemática nos níveis Fundamental e Médio. Reconhecendo a sua relevância na formação do cidadão, em 20 de dezembro de 2017, foi homologada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que apresenta em seus documentos que a Unidade Temática Álgebra seja desenvolvida desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (Coelho; Aguiar, 2018, p. 171).

Na prática, porém, o ensino e a aprendizagem de Álgebra criaram lacunas. Acreditamos que isso se dê por sua ênfase em aspectos técnicos, normalmente, excluindo o desenvolvimento conceitual e buscando um pensamento mais abstrato. Entendemos que, ao enfatizar o pensamento algébrico, em vez de limitá-lo a problemas técnicos e funcionais, o ensino de Álgebra poderia promover, não apenas o aprendizado da Matemática, mas também ajudar a aprimorar o pensamento lógico-abstrato do estudante, o que é uma ideia importante para o desenvolvimento de cidadãos capazes de viver em uma sociedade moderna.

Nesse ínterim, importa lembrarmos que a Álgebra, segundo Coelho e Aguiar (2018), faz parte do desenvolvimento humano e, em razão disso, surgiu com a pretensão de resolver demandas práticas, do cotidiano, de várias maneiras. Em consonância com os autores, ao longo da história da Álgebra,

> Houve a necessidade da construção de uma linguagem simbólica apropriada às questões tratadas aliada à consequente emersão de conceitos algébricos cada vez mais abstratos. Só assim a Álgebra se consolidou como área de conhecimento, área essa que é, portanto, fruto de um desenvolvimento histórico e não inata ao ser humano. Dito de outra forma, o conhecimento da Álgebra precisa do meio social para ser aprendido e assimilado pelo indivíduo (Coelho; Aguiar, 2018, p. 171).

A priori, a Matemática trabalhava, predominantemente, com números, grandeza e formas. Com o tempo, mudanças aconteceram. Muitos matemáticos cooperaram para essa evolução, com contribuições significativas, como Carl Friedrich Gauss (1777-1855), reconhecido como o principal matemático do século XIX e chamado de “O Príncipe dos Matemáticos”. Seu talento foi observado precocemente. Aos dez anos, foi desafiado por seu professor a somar todos os números naturais de 1 a 100. Realizou essa operação sem fazer qualquer registro, pois percebeu que $1+100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51 = 101$, ou seja, o resultado da soma proposta era $50 \cdot 101 = 5050$.

Para Eichenberger Neto (2016, p. 62), Gauss fez contribuições notáveis à astronomia, geodésia e eletricidade. Ele inventou dispositivos como o heliógrafo e o telégrafo eletromagnético, e afirmou que “a Matemática é a rainha da ciência e a teoria dos números é a rainha da Matemática”. Karl Friedrich Gauss foi um matemático e astrônomo alemão, cientista matemático que desenvolveu um estudo analítico da estrutura altamente algébrica de objetos matemáticos e também focado em conceitos físicos algébricos; era conhecido como um matemático puro e aplicado.

Tal como Gauss, outros estudiosos desenvolveram pesquisas e colaboraram para o desenvolvimento da Álgebra. E, nessa direção, atualmente, no cotidiano escolar, de acordo com Bianchini e Lima (2021), a Álgebra costuma ser associada à resolução de equações, e a justificativa dessa associação é histórica:

> [...] embora não possa ser dito, em razão especialmente de questões ligadas ao simbolismo, que os babilônios faziam Álgebra na acepção moderna do termo, o trabalho por eles desenvolvido relacionado à resolução de equações (...) trouxe em seu bojo elementos presentes no que hoje chamamos de Álgebra, (...) que está atrelada à habilidade em descrever relações, aos procedimentos e às técnicas de resolver problemas a partir de tais relações (Bianchini; Lima, 2021, p. 989).

Nessa rota, em síntese, podemos, junto com Kluth (2004, p. 6), afirmar que a Álgebra “explicita o modo com que abordamos e lidamos com os objetos matemáticos, porém, mais do que isto, ao explicitar ela pode recuperar e estender conceitos de objetos matemáticos constituídos ou em construção”.

4.2 Os documentos orientadores da educação e ensino da Álgebra

Visitando os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998, p. 115), atentamos para a intencionalidade na proposta em ofertar aos estudantes do Ensino Fundamental o ensino da Álgebra. Ademais, os PCNs sugerem que o seu ensino deve ser feito de forma clara e objetiva, para que os estudantes consigam desenvolver a capacidade de abstração e generalização, construindo ferramentas para a resolução de problemas.

Além disso, verificamos que,

> Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as 'manipulações' com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. [...] Existe um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que interrelacionem as diferentes concepções da Álgebra (Brasil, 1998, p. 116).

A Álgebra está presente de muitas maneiras diferentes em nossas vidas. Desse modo, e como deveria, é parte integrante da Educação Matemática trabalhada em toda a Educação Básica de nossas escolas. Reconhecendo sua importância na formação do cidadão, foi aprovada, em 20 de dezembro de 2017, a Base Nacional Comum Nacional (Brasil, 2017), que institui a disciplina Álgebra desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Na prática, contudo, o seu ensino e aprendizagem geraram "brechas" diagnosticadas em diversos estudos e avaliações governamentais. Acreditamos que isso se dê por sua ênfase em aspectos técnicos, muitas vezes, excluindo o desenvolvimento conceitual. Nesse sentido, pode ser fortalecida se o ensino se concentrar na exploração de ideias dos estudantes, que auxiliem a investigar padrões e analogias quando confrontadas com questões diárias.

A finalidade da Álgebra, no Ensino Fundamental, consoante a BNCC, é desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes, ou seja, incentivar os estudantes a criar modelos matemáticos para entender, figurar e analisar as relações quantitativas e qualitativas entre quantidades, usando estruturas matemáticas úteis. Para a BNCC (2017), no processo de desenvolvimento desse pensamento algébrico, é necessário que os estudantes: aprendam a identificar regularidade e padrões em sequências numéricas e não numéricas; criem leis matemáticas que representam a relação de interdependência entre grandezas; utilizem e interpretem as diversas representações gráficas e simbólicas, necessárias à resolução de problemas, que fazem uso de equações e inequações.

> Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (Brasil, 2017, p. 270).

Em conformidade com a BNCC (2017), quando falamos em Álgebra, no Ensino Fundamental, precisamos lembrar que, nos anos iniciais, nenhuma “letra” é proposta para expressar as regularidades e interdependências de tamanho, por mais simples que sejam essas regularidades. Nessa fase, esperamos que os estudantes sejam capazes de formular ideias sobre regularidades, generalizar modelos e compreender as propriedades da igualdade a partir de situações concretas e práticas do seu cotidiano.

Já, nos anos finais, os estudos dessa unidade devem ser continuados e aprofundados, para que os estudantes compreendam os diferentes significados de variáveis em expressões numéricas, generalizem propriedades, estudem a regularidade de sequências em valores numéricos, representem um valor desconhecido numa expressão algébrica, e determine a diferença entre duas grandezas.

Conforme a Área de Conhecimento Matemática, a *Matriz de Referência do Estado do Rio Grande do Sul/2023* (Rio Grande do Sul, 2023) expressa as relações entre Ano/Habilidades/Objetos de Conhecimento. O recorte referente a Álgebra está em anexo (Anexo 1) nesta dissertação. Esse documento orienta o ensino algébrico. A Matriz é construída a partir da proposta da BNCC, documento que direciona o trabalho das redes educativas do Brasil, sendo fundamental que os professores compreendam suas diretrizes.

Na elaboração do currículo estadual, percebemos um incremento nas competências propostas pela BNCC. Especificamente, os professores do Ensino Fundamental precisam estudar e analisar a Álgebra cuidadosamente para considerar as habilidades sugeridas. É importante que os professores estejam atentos às recomendações curriculares da BNCC e da área, a fim de adequar os métodos de ensino às necessidades de seus estudantes.

4.3 Caminhos para desenvolver a investigação matemática na sala de aula

Nesta seção, apresentamos a Investigação Matemática em sala de aula à luz das concepções de Ponte (2003, 2009) e Skovsmose (2000, 2014) em relação às atividades de investigação, e percebemos que não possuímos respostas prontas. Por isso, ao sugerirmos situações de atividades aos estudantes, pretendemos instrui-los a descobrir e formular seus próprios conceitos. Tentamos, então, elucidar esses objetivos.

Analisamos, nesta proposta, os momentos na realização de uma Investigação – Ambientes de Aprendizagem envolvendo os Cenários para Investigação – consoante aclaramos no quadro abaixo:

Quadro 9 – Proposta de Investigação

Momentos na realização de uma investigação	Ambientes de Aprendizagem
Exploração e formulação de questões: • Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões **Conjecturas:** • Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura) **Testes e reformulação:** • Realizar testes • Refinar uma conjectura **Justificação e avaliação:** • Justificar uma conjectura	**Cenários para Investigação** (2) Referência à Matemática pura (4) Referência à semirrealidade (6) Referência à realidade

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Frisamos que esta investigação teve por base uma proposta pedagógica para o estudo da Álgebra. Esta proposta, com atividades investigativas referentes ao estudo de padrões, regularidades e equações, propôs, também, aos estudantes, experiências de aprendizagem diversificadas e significativas em termos de sua capacidade de representar relações simbolicamente, compreender e trabalhar com expressões algébricas e resolver problemas que enfatizem o desenvolvimento do pensamento algébrico em vez da prática repetitiva.

Como fazer essa mudança do Paradigma do Exercício para o Cenário para Investigação? Essa pergunta levou-nos a pesquisar e elaborarmos algumas sugestões, sendo:

a) **Introduzir problemas abertos:** em vez de fornecer problemas fechados, que possuem uma solução clara e única, apresentemos problemas que não têm uma resposta definida. Isso permite que os estudantes explorem várias soluções possíveis e vejam a Matemática como um processo criativo, ao invés de algo repetitivo. Por exemplo: problema em forma de Enigmas de Gaspar Nicolas;
b) **Usar jogos matemáticos:** jogos matemáticos, como jogos de estratégia ou quebra-cabeças, podem incentivar os estudantes a pensar criticamente e usar a lógica. Também oferecem a oportunidade de explorar conceitos matemáticos de maneira divertida e interativa. Exemplificando: usando o material das Torres de Hanói, fazer a indagação de como mover uma pilha de discos de uma haste para outra, seguindo as regras específicas do jogo, no menor número possível de movimentos;
c) **Fazer perguntas abertas:** ao invés de dar respostas prontas aos estudantes, fazer perguntas que levem a discussões e reflexões matemáticas. Por exemplo: “por que é verdade que 2+2=4?” ao contrário de simplesmente dizer que essa é a resposta correta;
d) **Explorar contextos do mundo real:** ao conectar a Matemática ao mundo real, os estudantes podem ver como ela é relevante e útil. Isso pode ser feito através de projetos de pesquisa ou atividades que envolvam orçamentos, gráficos de dados ou problemas de modelagem;
e) **Encorajar a tomada de riscos:** na Matemática, nem sempre há apenas um modo de resolver um problema. Encorajar os estudantes a experimentar diferentes abordagens e a tomar riscos calculados, mesmo que isso signifique cometer erros ao longo do caminho, é uma opção.

Averiguamos um exercício de um livro didático, uma semirrealidade. Escolhemos uma atividade complementar (Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p. 153):

> Samira estuda no 7º ano e gosta muito de confeccionar bijuterias. Ela quer ter seu próprio rendimento e resolveu aproveitar o dinheiro que ganhou em seu aniversário investindo em materiais para fazer pulseiras e colares de miçangas. Em parceria com sua irmã, gastou R$ 80,00 em compras para as

> bijuterias. Elas confeccionaram 100 pulseiras, vendidas a R$ 2,00 cada uma, e 62 colares, vendidos a R$ 2,50 cada um.
> a) Qual foi o total arrecadado por Samira?
> b) Qual foi o percentual de lucro (total arrecadado menos total investido)?
> c) Além do dinheiro para a compra de matéria-prima, quais outros custos você imagina que estão envolvidos nessa atividade de Samira?
> d) Você gostaria de ter seu próprio negócio? Qual?

Acerca dessa atividade, nossa proposta de investigação foi de que a professora, inicialmente, conversasse com a turma sobre alguns custos envolvidos em um negócio, como luz, água, local, tempo de trabalho, quantidade de pessoas, entre outros, que, no caso de Samira, não são custos contabilizados. Outrossim, explorasse essa situação e pedisse que citassem outras, que considerassem variáveis envolvidas. Ainda, explorar as equações, destacando que as letras representavam elementos desconhecidos e, portanto, desempenhavam o papel das incógnitas.

Consideramos interessante discutir com os estudantes em que outras situações usamos esse tipo de equações. O objetivo era que eles compreendessem que, ao desenvolverem um cálculo, aplicam conceitos matemáticos. Se necessário, a professora reportar-se-ia aos símbolos matemáticos que os estudantes conheciam, fazendo um registro com seus significados correspondentes e suas propriedades exploradas e comparadas, podendo ser através de uma roda de conversa com o grupo, e, por fim, retornar à situação novamente. Pensar sobre ela é uma estratégia relevante para a aprendizagem significativa.

Organizamos um roteiro com algumas atividades sugeridas aos estudantes do sétimo ano, pensando em possibilitar que se movimentassem nos três Ambientes de Aprendizagem que mobilizam Cenários para Investigação, relacionando as atividades com os objetos do conhecimento possíveis de explorar. O quadro a seguir representa a organização inicial das atividades com o grupo de estudantes participantes:

Quadro 10 – Organização Inicial das Atividades

(continua)

Organização Inicial das Atividades			
	Ambiente de Aprendizagem (2)	**Ambiente de Aprendizagem (4)**	**Ambiente de Aprendizagem (6)**
Situação proposta	**Jogo** Torre de Hanói Jogo de varetas	**Enigmas** Situação-problema (livro didático)	Pesquisa de materiais escolares.
Proposição	Formular conjecturas, utilizando, a situação do jogo apresentado, na construção de estratégias em relação as possíveis soluções.		Fazer comparação entre mercadorias das Livrarias pesquisadas: procedência, custo/benefício.

Quadro 10 – Organização Inicial das Atividades

(continuação)

Organização Inicial das Atividades			
	Ambiente de Aprendizagem (2)	**Ambiente de Aprendizagem (4)**	**Ambiente de Aprendizagem (6)**
		Desenvolver o pensamento crítico e a autonomia na justificativa de novas descobertas, quando da sistematização das aprendizagens envolvidas na resolução de problemas de investigação. estimulando a curiosidade e criatividade, promovendo também a interação com o vocabulário matemático. Formular conjecturas, construção de estratégias em relação as possíveis soluções. com ou sem uso da Álgebra.	Representação e simulação de possíveis compras utilizando a linguagem algébrica. Estimular o raciocínio lógico e dedutivo, a interação na investigação, sugestão de hipóteses, buscar novas formas de resolução para solucionar um problema.
Perguntas norteadoras	- Você conhece ou já viu esse jogo? Faz ideia de como jogar? Gostaria de saber? Então vamos conhecer a Torre de Hanói. -É possível determinar um número mínimo de movimentos? -Existe, nessa atividade, alguma relação Matemática entre o número n de peças da torre e o número mínimo necessário para efetuar a sua transferência da haste de origem para a haste final? - O que acontece com o número de movimentos quando o número de discos aumenta em uma unidade? E em duas unidades? E em três? E em n? Que tipo de função descreve este comportamento? - Qual o número mínimo de mudanças possíveis quando se tem 3 (três) discos? - E se tivéssemos 10 (dez) discos, qual seria o número mínimo de mudanças possíveis?	- Quais são as informações oferecidas pelo problema? - Lendo a situação podemos perceber se há algo para ser resolvido? -É possível solucionar essa situação? -No que pode ajudar ler a situação com atenção e compreendê-la? - Como definir os caminhos que vamos seguir para resolver um problema? -Há uma estratégia única de resolução de problema ou depende dos conhecimentos e das habilidades que cada um tem? - O que é um desafio? Todo problema é um desafio? Por quê? - O que são estratégias de resolução de problemas?	-O que cada um pesquisou? -Os preços são justos quanto a oferta? -É possível escrever uma expressão algébrica para cada produto? E para todos? E para um determinado valor? -Conseguiremos fazer comparativos entre as livrarias? -Quais vantagens e desvantagens de fazermos uma pesquisa de preços? -O que cada um pesquisou? -Os preços são justos quanto a oferta?

Quadro 10 – Organização Inicial das Atividades

(conclusão)

Organização Inicial das Atividades			
	Ambiente de Aprendizagem (2)	**Ambiente de Aprendizagem (4)**	**Ambiente de Aprendizagem (6)**
	Varetas - Quantas varetas da cor verde um jogador retirou para ter uma pontuação final de 40 pontos? - Com quais combinações de varetas um jogador conseguiria obter 35 pontos em uma rodada?		
Objetos de conhecimento	- Investigação de regularidades ou padrões em sequências. Linguagem. Matemática.	- Relação de igualdade. - Propriedades da igualdade e noção de equivalência. - Linguagem algébrica: variável e incógnita. - Equações polinomiais do 1º grau. - Valor numérico de expressões algébricas. -Refletir, fazer leitura e verificar os dados presentes para resolver a situação apresentada.	- Linguagem algébrica: variável e incógnita. - Equações polinomiais do 1º grau. - Valor numérico de expressões algébricas. -Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo. - Raciocinar, resolver e socializar sentenças algébricas representadas por equações polinomiais de 1º grau, fazendo uso das propriedades da igualdade. -Identificar e reconhecer expressões algébricas para representar situações reais. -Reconhecer e utilizar estratégias que envolvam equações de 1º grau, bem como analisar, interpretar e validar o resultado obtido no contexto.

Fonte: Elaborado pela Autora (2023)

O propósito dessas atividades foi de que os estudantes formulassem questões, procurassem e construíssem conhecimentos que lhes propiciassem tomar decisões, evidenciando a importância do trabalho com Investigação Matemática na sala de aula.

Na próxima seção, retratamos o desenvolvimento das atividades.

5 EPISÓDIOS INVESTIGATIVOS: UM DIÁLOGO COM OS ESTUDANTES

“Episiodiar” foi uma opção para narrar o desenvolvimento das atividades investigativas, com a intenção de que o leitor possa nos acompanhar pelas “partes” de nossa caminhada. Como já explicitado, o trabalho foi realizado com seis estudantes do Ensino Fundamental de uma Escola Pública, do sétimo ano, que se propuseram a irem até a escola no turno oposto de suas atividades, para fazerem parte desta pesquisa. Foram quatro encontros, com duração de duas horas cada.

Propomos atividades que contemplavam Ambientes de Aprendizagem em três Cenários para Investigação: Referência à Matemática pura (2); Referência à semirrealidade (4) e Referência à realidade (6). Podemos dizer que a dinâmica de trabalho foi diversificada, uma vez que, para cada Cenário Investigativo, foram propostas experiências variadas. Como os encontros ocorreram em turnos opostos, dedicamos um único encontro semanal, visto que a maioria dos estudantes tinham outras atividades extraclasses, de cunho particular. Sendo assim, trabalhamos em torno de 30 dias, desenvolvendo os encontros presenciais, além de fazermos contato via WhatsApp, em grupo específico para conversas, possíveis dúvidas e até mesmo descontração, em momentos oportunos.

Na sequência, versamos sobre o desenvolvimento das atividades investigativas em cada encontro, em cada episódio.

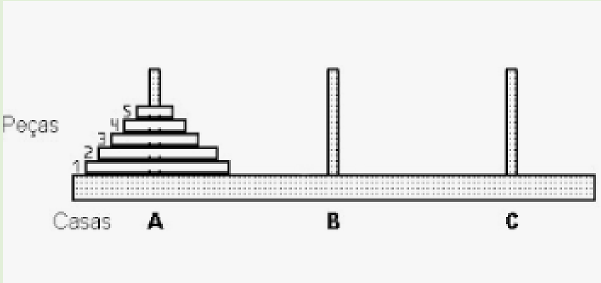
5.1 Episódio 1 – Torre de Hanói

Ambiente de Aprendizagem:
(2) – Referência à Matemática pura num Cenário para Investigação.

Tarefa Investigativa Proposta:
Torre de Hanói X Álgebra

Desenvolvimento da Atividade Investigativa:
a) estudo do texto (TORRE DE HANÓI);
b) proposição do jogo em duplas;
c) proposição todo o grupo.

TORRE DE HANÓI



História e Lenda: A Torre de Hanói, também conhecida por torre de bramanismo, é um "quebra-cabeças" que consiste numa base contendo três estacas, no qual são dispostos alguns discos uns sobre os outros numa das estacas, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. A Torre de Hanói tem sido tradicionalmente considerada como um procedimento para avaliação da capacidade de memória de trabalho, e principalmente de planeamento e solução de problemas.

Origem do jogo: Este jogo foi inventado pelo matemático francês Édouard Lucas inspirando numa lenda Hindu, em 1883. O nome do jogo surgiu do símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã. Existem várias lendas a respeito da origem do jogo, a mais conhecida diz respeito a um templo Benares, situado no centro do Universo. Diz-se que o Deus Brama supostamente havia criado uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Deus Brama ordenara os monges que movessem todos os discos de uma estaca para outra segundo as suas instruções. As regras eram simples: apenas um disco podia ser movido de cada vez e nunca um disco maior deveria ficar por cima de um disco menor. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo desmoronar-se-ia e o mundo desapareceria. Dessa forma criava-se um mundo, o mundo de Hanói.

Objetivo: O objetivo é transferir a torre inteira para um dos outros pinos, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior em cima de um menor.

Regras do jogo:

Movimentar uma só peça (quadrado) de cada vez;

Uma peça maior nunca pode ficar em cima de uma menor;

Transportar as peças da casa A, para a casa C, usando a B como intermediária.

Inicialmente, os estudantes tiveram contato com o jogo livremente, para que se familiarizassem com as peças, reconhecendo-as, uma vez que informaram não conhecer o jogo. Nesse primeiro momento, observamos a postura inicial dos estudantes, que se mostravam acomodados, característica do Paradigma do Exercício contraposto a uma abordagem de investigação:

> E1: *A gente não pensa não... isso pode mover um. Depois passa para. Esquece.... Eu já vi esse tipo. Reinicia verde em cima da marrom rosa em*

> *cima da... Sim, está bom. Mas a gente não. Eu posso. Eu posso colocar o verde em cima do rosa*.
> E5: *Um de cada vez, uma em cada um, daí, não é? Só um de cada um de cada vez, né? Essa regra não é sim?*
> E4: *Aham, você não pode ser em cima complicado tá? ... Um vai ..., vai, tira, vai tirando bota aí, tira*.
> E1: *Eu estou mudando de cabeça, ...*
> ...
> E4: *Foi mal isso, medrosa. Agora eu preciso de novo. Quase em cima de ... Aí bota, tira. Ninguém aqui dá certo. Eu queria... Não, daqui a pouco vai acabar. Não sei. E tira isso aqui, um. É isso aqui. Certo, muito ..., é quase nervoso. Está aí. Porque que o rosa está dando problema?*
> ...
> E4: *Deixa-me terminar, então. Deixa mais um tempo. Isso é um ciclo sem fim, não se acaba. Então, agora não sei onde vai pequeno, acho que vai...*
> E3: *Não entendi nada.*
> E4: *Eu acho que é impossível.*

Face as falas que os estudantes produziram, constatamos que estavam acostumados com situações em que o professor apresenta algumas ideias e/ou técnicas matemáticas e, depois, trabalham com os exercícios selecionados. As atividades, geralmente oriundas dos livros didáticos, já vem prontas, de acordo com os conteúdos, representando uma prática tradicional em salas de aula.

Entendemos que mover-se do Paradigma do Exercício em direção ao Cenário para Investigação poderá contribuir para o “enfraquecimento” da autoridade da sala de aula de Matemática tradicional. As práticas de sala de aula, baseadas num Cenário para Investigação, diferem daquelas embasadas em exercício.

> Exercícios desempenham um papel crucial no *ensino de Matemática tradicional.* Ao longo de todo o período em que frequentam a escola, as crianças, em sua maioria, respondem a mais de 10 mil exercícios. Contudo, essa prática não ajuda necessariamente a desenvolver a criatividade matemática. Será que o papel da Educação Matemática é preservar visões equivocadas de ordem social e política, que estão profundamente arraigadas na sociedade? Será que nós perdemos enquanto educadores? Ou será que a Educação Matemática desde sempre é pautada por interesses do mercado de trabalho e nós, educadores matemáticos, temos dificuldade de reconhecer isso? (Skovsmose, 2014, p.16).

Essa postura inicial do Paradigma do Exercício ficou evidente quando os estudantes formularam as seguintes questões:

> E5: *Um de cada vez, uma em cada um, daí, não é? Só um de cada um de cada vez, né?*
> E4: *Agora tem que transferir tudo isso aqui com vermelho. Se desse pra colocar assim?*
> E1: *Quantos movimentos deu? Eu não contei, quais são as regras do jogo?*

Os Cenários para Investigação requerem que o professor dialogue com os estudantes em termos da questão escolhida e/ou vivenciada, a fim de estabelecer possibilidades de investigação, e não aquelas em que as questões parecem ser óbvias, opondo-se às falas citadas acima, exemplificando, por conseguinte, o Paradigma do Exercício.

> Espera-se dos alunos que encontrem uma resposta certa, e muitas coisas interferem nesse processo. Se o aluno obteve um resultado não esperado, talvez o motive tenha sido, no fim das contas, a escolha de um método indevido. Ou ele e pode simplesmente ter cometido um equívoco ao copiar os dados do enunciado (Skovsmose, 2014, p.17).

Dessa forma, consideramos que os estudantes tiveram a oportunidade de experienciar a atividade em duplas e no grupo, na tentativa de buscar soluções, sem uma resposta da professora.

Após as tentativas propostas, iniciaram uma discussão, como um momento de pontuar as dificuldades relacionadas ao jogo.

> E1: *Quando nós tivermos uma pecinha. O mínimo de movimentos, o mínimo né? É o mínimo? Pode dar mais? Quando tinha duas pecinhas o mínimo de movimentos? Três?*
> E2: *Imagina 64 pecinhas? Como eles fizeram? E se nós começar assim? O dobro de três é seis mais um é sete. O dobro e o dobro de quatro?*
> E2: *Alguns números primos? Todos os resultados são primos?*
> E2: *17105. Pra não ficar fazendo todos os cálculos? Como descobrir? Como fazer?*
> E5: *Profe não tem um jeito mais fácil?*
> E2: *Profe, esses são os movimentos mínimos né, eles poderiam ter feito mais? Né?*

Depois de jogarem e entenderem o jogo, os estudantes foram questionados se sabiam quantos movimentos foram feitos durante a jogada, introduzindo ideias matemáticas. Na sequência, solicitamos que os estudantes iniciassem com as sete peças. Tiveram dificuldades em jogar, por isso, sugerimos que iniciassem com menos peças; primeiro com uma peça. Nesse processo, a professora questionava qual o número mínimo de movimentos necessários para transportar a torre para o terceiro pino; depois com duas peças, com três e quatro. Um dos estudantes contava os movimentos e observava as regras, enquanto o outro jogava, e invertiam os papéis a cada peça adicionada. Eles poderiam encontrar o menor número de movimentos para transferir a torre de um pino a outro, bem como uma regularidade entre as jogadas, obtendo uma solução para um número qualquer de discos.

Enquanto isso, algumas questões foram feitas para ajudar o raciocínio:

- O número de movimentos é alterado quando a torre é transportada para o outro pino?

> E6: *Quanto mais vai montando, vai modificando, tipo, o número de peças.*

- Acrescentando uma peça à torre, em quanto aumentaria o número de movimentos?

> E: *Três movimentos com 2 peças.*
> E2: *É engraçado, meu muito.*

Acerca dessas reflexões, a questão dos conhecimentos matemáticos que estes estudantes possuem em suas bagagens, as dificuldades explicitas no jogo, o conhecimento do estudo de Álgebra e as iniciativas em resolver as dificuldades com imediatismo ou com um pensamento mais elaborado ficaram evidentes.

Ponte (2009) faz-nos refletir a respeito da pesquisa, que o sucesso depende, como qualquer proposta de ensino, do Ambiente de Aprendizagem criado em sala de aula. É importante que os estudantes se sintam parte desta e tenham iniciativas para fazer perguntas, pensar, explorar seus pensamentos e expressá-los ao professor e aos colegas.

Distinguimos que o Paradigma do Exercício está muito presente nas resoluções de atividades de sala de aula, quando nos deparamos com respostas do tipo:

> E1: *A gente não pensa não... isso pode mover um. Depois passa para. Esquece.... Eu já vi esse tipo. Reinicia verde em cima da marrom rosa em cima da... Sim, está bom. Mas a gente não. Eu posso. Eu posso colocar o verde em cima do rosa.*
> E1: *Tá bugado o cérebro.*
> E5: *A gente não pensa, né? ... assim pode. Onde ... passa rápido pra cá, essa aqui, essa. Espera aí é que eu fiquei aqui, né? Fica o azul... bota aqui.*
> E5: *Ai, Laura, pra cá. Ah trocam, raciocinou Duda. Não, não, não. Tá bom, vai lá.*
> E1: *Gente, eu gostei. Pensativo é cansativo, sabe? Pensa só um pouquinho. Não, não um... Rosa, Vem Pra Cá.*
> E4: *Deixa eu terminar, então. Deixa mais um tempo. Isso é um ciclo sem fim, se não se acaba. Então, agora não sei onde vai pequeno, acho que vai...*
> E6: *Já agora que eu não sei explicar. A quantidade de peças influência nos movimentos. Eduarda: Entendi o número de peça influência nos movimentos.*
> E: *Alguém entendeu? É, deu 120 alguma coisa, né? Contei as últimas 7, 20 e 20*.
> E4: *Eu acho que é impossível.*
> E6: *Meus neurônios não consigo contar com gente falando.*
> E1: *Profe eles ficaram dias jogando.*

E4: *Aí o que aconteceu? Difícil. Vamos aí.*

Diante da situação que se apresentava, a professora fez perguntas, provocando os estudantes a fazerem suas conjecturas:

- Existe alguma relação matemática entre o número mínimo de jogadas necessárias para transportar uma torre e o número necessário para transportar a torre acrescida de uma peça?

E6: *Já agora que eu não sei explicar. A quantidade de peças influência nos movimentos.*

- Entre estes números e o que ocorre no jogo?

E1: *Entendi o número de peça influência nos movimentos.*

- Você utiliza alguma ideia matemática para escolher suas jogadas? Qual ou quais? Como você mobiliza essas ideias?

E6/E2: *A quantidade de peças influenciando os movimentos. Aqui é Álgebra, Matemática. É Álgebra, é matemática, Álgebra tem Álgebra junto, né?*

Assim que os estudantes foram percebendo as relações, a professora recomendou que construíssem uma tabela para auxiliar nas conjecturas da atividade que se apresentavam, relacionando o número de peças com o número mínimo de movimentos necessários para o transporte. Desse modo, configurou-se a seguinte tabela:

Tabela 2 – Sugestão de Tabela para Registro dos Movimentos

Quantidade de discos das torres	Quantidade de movimentos de cada peça							Total de movimentos
	Pç 1	Pç 2	Pç 3	Pç 4	Pç 5	Pç 6	Pç 7	
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Fonte: Elaborado pela Autora (2023)

Ainda, surgiram os questionamentos: por qual número de pinos se deve começar quando o número de peças for par e quando o número de peças for ímpar. Será que isso tem algo em comum? Foram feitas várias suposições:

> E2: *Imagina 64 pecinhas? Como eles fizeram? E se nós começar assim? O dobro de três, é seis mais um é sete. O dobro e o dobro de quatro?*
> E5: *Não, o dobro. É oito mais um. Não dá quinze.*
> E2: *Ah não, eu entendi na sequência do outro lado.*
> E2: *O dobro mais um não deu certo...*
> E1: *Todos os números são impares.*
> E2: *Alguns números primos? Todos os resultados são primos. Quinze é primo.*
> E2: *Acho que não. Porque o 1 não é primo nem composto.*
> E2: *Estou fazendo uns cálculos aqui: 3+3=6+1=7, 7+7=14+1=15, 15+15=30+1=31, 31+31=62+1=63, 63+63=126+1=127, 27+127=254+1=255, 255+255=510+1=511.*

Nessa altura, os estudantes já haviam observado algumas estratégias para vencer com o mínimo de movimentos possíveis, ademais, indagavam-se: será que conseguiremos chegar a uma expressão algébrica, ou uma fórmula matemática, uma lei geral, para determinarmos um número mínimo de movimentos necessários com uma determinada quantia de peças (quadrados e/ou discos), no intuito de chegar a uma fórmula? Esses comentários eram reforçados e instigados pela professora: o que *acontece se...* Assim, chegamos a Lei de Formação para os cálculos de movimentação mínima de quadrados na Torre de Hanói (2^n -1), em que **n** é o número de quadrados da torre de Hanói. A Tabela 3 traz a exemplificação dela:

Tabela 3 – Aplicação da Lei de Formação

	Substituição		**Movimentos mínimos**
n=1			
n=2			
n=3	(2^3 -1)	(8-1)	7
n=4			
n=5			
n=6			
n=7			

Fonte: Elaborado pela Autora (2023)

A pretensão de trabalharmos com a Torre de Hanói era de que os estudantes conseguissem criar um modelo matemático que desse a quantidade mínima de jogadas em função do número de discos, chegando, aos poucos, entre formulações, conjecturas e hipóteses, à Lei de Formação. Dentro desse enquadramento,

> O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (Ponte, Brocardo, Oliveira, 2009, p. 23).

Nessa direção, foi possível chegarmos, juntos, a algumas considerações finais:

a) Se, ao invés de seis peças, tivermos sete, oito, ou, então nove, como é mais comum nesse jogo, qual seria o número mínimo de movimentos necessários para transportar a torre?

> E5: *Trinta e sete. Trinta e um, trinta e um, é o mínimo.*
> E1: *Eu fiz. Aí eu fiz alguma coisa errada.*
> E2: *Oitenta e nove meu, deu pra mim. Cento e noventa e cinco. Noventa e seis. Não, daí eu fiz alguma coisa errada, com certeza.*
> E1: *Cento e vinte e sete.*

b) E se aumentarmos o número de pinos, por exemplo, mais um pino ou, então, mais dois, o que muda no jogo?

c) Qual o número mínimo de movimentos com 64 peças?

> E4: *19904.*
> E2: *64-9=55x 311= que deu um número ímpar=17105.*
> *9-3=6 x 7=42*
> *Não deu certo, essa teoria também.*
> *4 x 1=4 -1=3*

A Torre de Hanói é um exemplo de possibilidade para estudar a recursividade e um jogo educativo primordial para o desenvolvimento do raciocínio. Ademais, toda vez que questionados, instigados a pensar um pouco mais, a ver além do óbvio, criam conjecturas, suposições, teorias, e, nesse caminho, chegam a conclusões.

Nessa trama, entre enunciados, dúvidas e hipóteses, a professora sugeriu que montassem uma tabela para registrar o número mínimo de movimentos das peças:

Tabela 4 – Número Mínimo de Movimentos para Sete Peças

Quantidade de discos das torres	Quantidade de movimentos de cada peça							Total de movimentos
	Pç 1	Pç 2	Pç 3	Pç 4	Pç 5	Pç 6	Pç 7	
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	0	0	3
3	4	2	1	0	0	0	0	7
4	8	4	2	1	0	0	0	15
5	16	8	4	2	1	0	0	31
6	32	16	8	4	2	1	0	63
7	64	32	16	8	4	2	1	127
8	128	64	32	16	8	4	2	255

Fonte: Elaborado pela Autora (2023)

A ideia de usarem a tabela, registrando o número mínimo de movimentos para sete peças, era de que os estudantes conseguissem visualizar e discutir sobre os passos e opções elegidas para que chegassem a menor quantidade de movimentos necessários para vencer.

Outro ponto relevante, importante salientarmos aqui, é que o jogo viabilizou uma visão metódica e cativante de Álgebra, que normalmente afasta os estudantes da disciplina de Matemática, posto a dificuldade em generalizar, conjecturar, justificar e encontrar fórmulas que expliquem determinados eventos.

5.2 Episódio 2 – Jogo Pega-Varetas

Ambiente de Aprendizagem:

(2) – Referência à Matemática pura num Cenário para Investigação.

Tarefa Investigativa Proposta:

Jogo Pega-Varetas

Desenvolvimento da Atividade Investigativa:

a) apresentação do jogo (texto);
b) questionamento quanto ao conhecimento do jogo, exploração do material jogando em duplas e fazendo as somas de acordo com cada jogada, sem uma regra geral;
c) registro das quantidades de varetas de cada cor obtida em uma tabela previamente recebida, identificando cada cor por uma letra do alfabeto e o valor numérico:

JOGO PEGA VARETAS

Este antigo jogo é muito divertido e já percorreu o mundo demonstrando que independentemente da nação idade ou diferenças, este jogo pode ser jogado por qualquer pessoa, especialmente aqueles que querem aumentar suas habilidades estratégicas de destreza e equilíbrio, além disso, os jogadores podem aprender a jogar rapidamente e, assim, competir com amigos e familiares usando uma forma mais divertida de socializar.

Objetivo do jogo: O objetivo é retirar uma a uma as varetas, até terminar as varetas, mas se mexer as varetas, além da que estiver pegando, passa a vez para o adversário.

Regras do jogo: Cada vareta, dependendo da cor, recebe um valor numérico, de acordo com o valor já revisado antes da partida.

Será considerado vencedor aquele que, ao final da partida, marcar o maior número de pontos e não aquele que tiver maior número de varetas.

OBS: Os alunos serão divididos em duplas, em seguida cada dupla recebe o jogo, a dupla decide através do par ou ímpar o iniciante.

Este episódio tem âncora na relação da atividade lúdica e a Matemática, através do jogo pega-varetas, com vistas a propor um trabalho investigativo para o ensino da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Abaixo, a Tabela 5 demonstra como o jogo deveria ser registrado, o valor de cada cor de vareta e a letra designada para cada cor:

Tabela 5 – Registrando o jogo

Cor da vareta	Valor da vareta/letras	Valor numérico da cor	Quantidade de varetas	Expressão numérica	Valor numérico da expressão
Amarela	a	10			
Verde	b	5			
Vermelha	c	15			
Azul	d	20			
Preta	e	50			

Fonte: Elaborado pela Autora (2023)

Juntamente com o jogo e as regras, a professor apresentou algumas reflexões, que os estudantes deveriam considerar:

a) Como podemos organizar esses dados?

b) Quais os valores de cada cor?

Amarela: 10

Verde: 5

Vermelha: 15

Azul: 20

Preta: 50

c) E se associarmos uma letra do alfabeto para cada cor?

Amarela: a

Verde: b

Vermelha: c

Azul: d

Preta: e

d) Sendo assim, como ficaria o exemplo: um aluno pegou cinco varetas amarelas, três vermelhas e uma preta?

5a + 3c +1e

Esta atividade é um exemplo prático, com ela, usamos expressão algébrica, pois contém letras e números e serve para representar situações-problemas a serem resolvidas. As letras representam a parte variável da expressão e poderão assumir qualquer valor.

Recebidas as explicações e o material, os estudantes jogaram e depois passaram a marcar os pontos, conforme a Tabela 5:

> E1: *Eu tô com uma vareta preta. A preta vale cinquenta.*
> E2: *A preta vale de cinquenta. Cada vareta tem um valor.*
> ...
> E1: *Obrigada meu Deus do céu, qual que vale mais depois da preta?*
> E2: *Eu acho que é amarelo.*
> ...
> E2: *Murilo tem que separar eu tenho dez.*
> E4: *Muda nada, tem que ser pelos pontos, tem que separar primeiro*
> ...
> E2: *Um, dois, três, cinco... Eu tenho cinquenta*
> *10.a +5. b+ 15.c + 20.d +50.e*
> *102 +5.3+ 15.1 =50*
> *Eu tenho cinquenta.*

Ao usarmos valores desconhecidos, usando letras, estamos utilizando a Álgebra, que tem incógnitas e variáveis. Logo, com essa atividade, a meta era que os estudantes sentissem a necessidade de substituir o valor de cada cor de vareta por um símbolo. Nessa acepção, os estudantes realizaram anotações e problematizaram as ações no grupo, fizeram a representação, utilizando a ideia da Álgebra, e, nesse percurso, perceberam que a representação do resultado do jogo seria a soma de cada quantidade de varetas multiplicada pelo valor da cor.

O jogo como estratégia de ensino e aprendizagem serviu para despertar um conceito algébrico antes de formalizá-lo, conduzindo os estudantes a construírem o seu próprio conhecimento matemático em um ambiente lúdico.

Divisamos, nesse episódio, a importância de nos conscientizarmos, como professores de Matemática, da necessidade de trabalharmos as aulas de forma lúdica, como ferramenta para o auxílio do ensino e aprendizagem.

5.3 Episódio 3 – Situações-problemas do livro didático

Ambiente de Aprendizagem:
(4) – Referência à semirrealidade num Cenário para Investigação

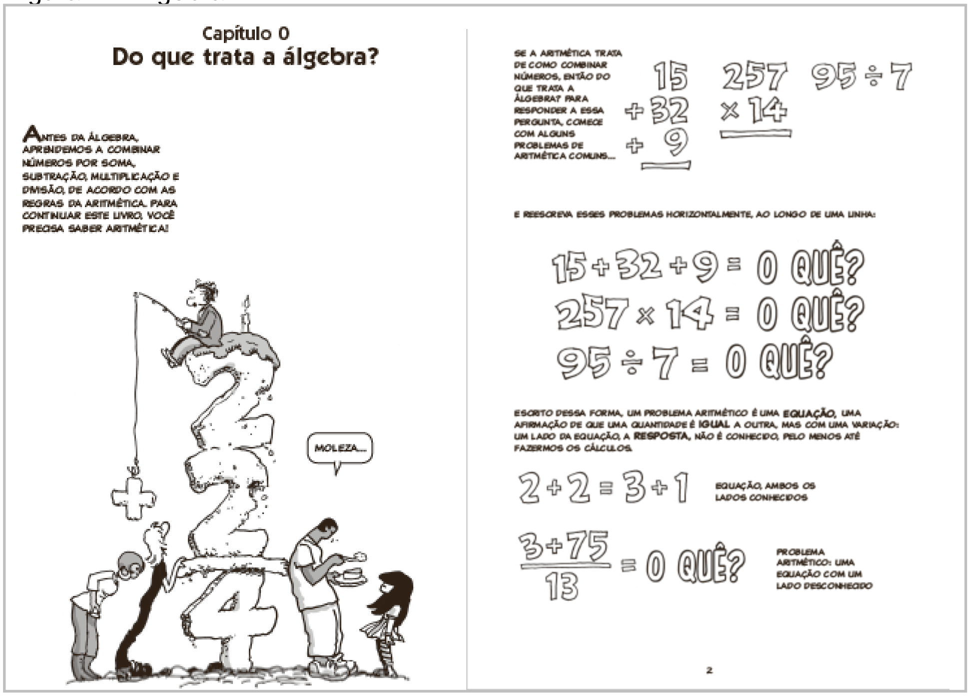
Tarefa Investigativa Proposta:
Situações-Problemas do Livro Didático

Desenvolvimento da Atividade Investigativa:
Leitura e discussão de situação-problema do Livro Didático.

Apresentamos a resolução de problemas como uma metodologia presente no ensino de Matemática, oriunda dos livros didáticos, porém, na maioria das vezes, observamos que estes não são trabalhados de maneira crítica, longe de uma prática investigativa, gerando insatisfação nos estudantes, pois, geralmente, os problemas são tratados meramente como exercícios de fixação.

Nesse episódio, propôs-se, aos estudantes, que juntos lessem e analisassem uma situação-problema do Livro Didático. Abaixo, a Figura 4 mostra a passagem escolhida para ser trabalhar com os estudantes:

Figura 4 – Álgebra



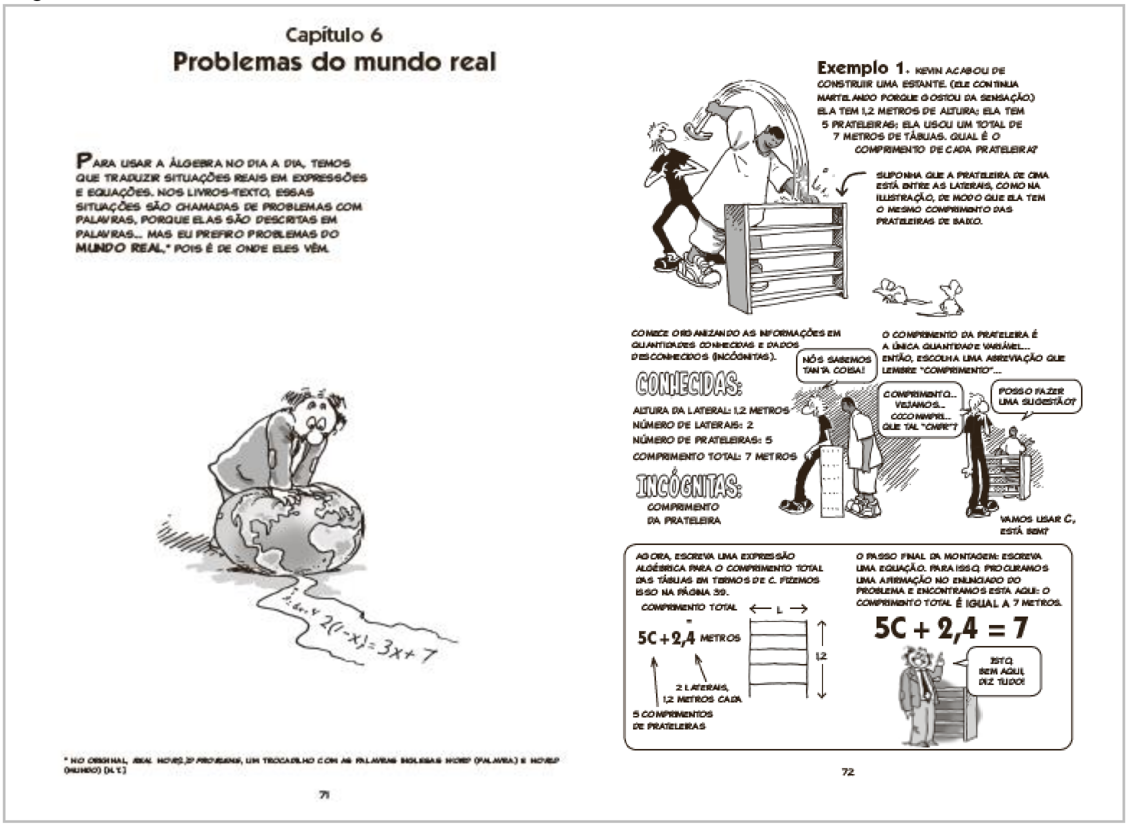
Fonte: Gonick (2017)

A partir do questionamento: “E4: *Profe o que é Aritmética?*”, valemo-nos da curiosidade dos estudantes para estimulá-los a falarem e conjecturarem sobre possíveis explicações, partindo do conhecimento que tinham a respeito do que é a Aritmética. Desse modo, mediante as falas, a professora foi dando pistas para que eles mesmos formulassem a explicação:

> E6: *Tinham os professores que pediam, assim: Ah eu tenho quinze maçãs e comprei mais trinta e duas, dei nove pra Joãozinho e Maria. Quantas maçãs eu fiquei? Aí tem que fazer. Eu fiquei com trinta.... A resposta também.*

A resolução de problemas existe no cotidiano das pessoas, exigindo soluções que, muitas vezes, requerem estratégias de enfrentamento. Na Matemática, estas estratégias ajudam o estudante a pensar novas situações em outras áreas do conhecimento. Como o exemplo apresentou o termo Aritmética, houve a necessidade de discutir o seu significado. Depois da conversa e entendimento do que é a Aritmética, passaram a explorar situações do livro didático, conforme a Figura 5:

Figura 5 – Problemas do mundo real



Fonte: Gonick (2017)

Juntos, leram a situação descrita. Os estudantes foram questionados quanto aos dados do problema, e perguntas indutivas foram sendo elaboradas, por exemplo:

a) As tábuas horizontais são as prateleiras e têm uma medida, e as verticais as laterais, outra medida. Por isso 5 x 3 + 2 x 4; 15+8= O que significa o 5 e o três? E o dois e o quatro significam o quê? Quanto vai dar?

Nesse rumo, os estudantes foram respondendo e conjecturando hipóteses e respostas:

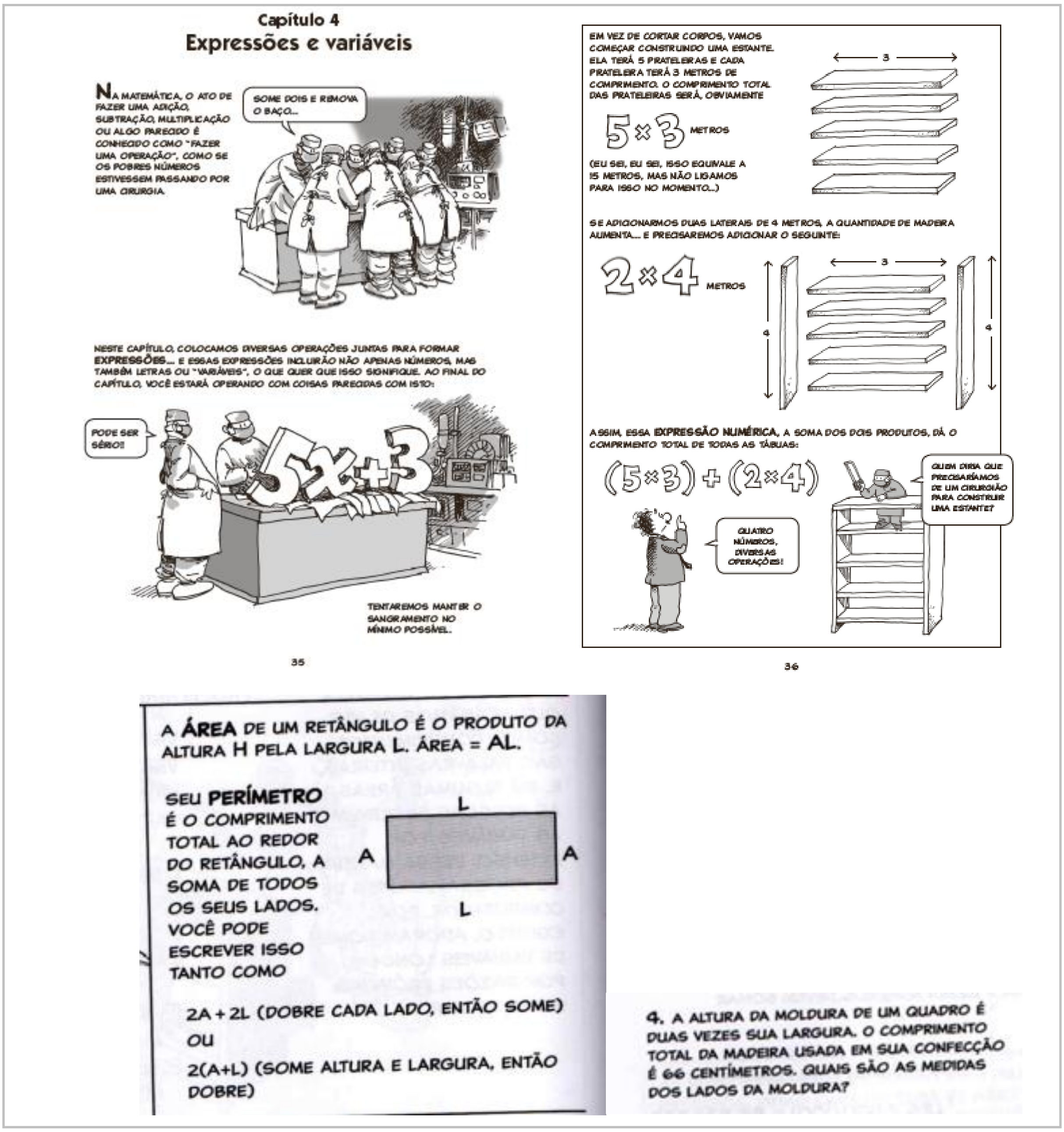
> E2: *O número de prateleiras, que é o cinco e o tamanho das prateleiras, que é o 3m. Duas laterais por 4 metros. As laterais é o número. Vai dar 23 Metros quadrados.*

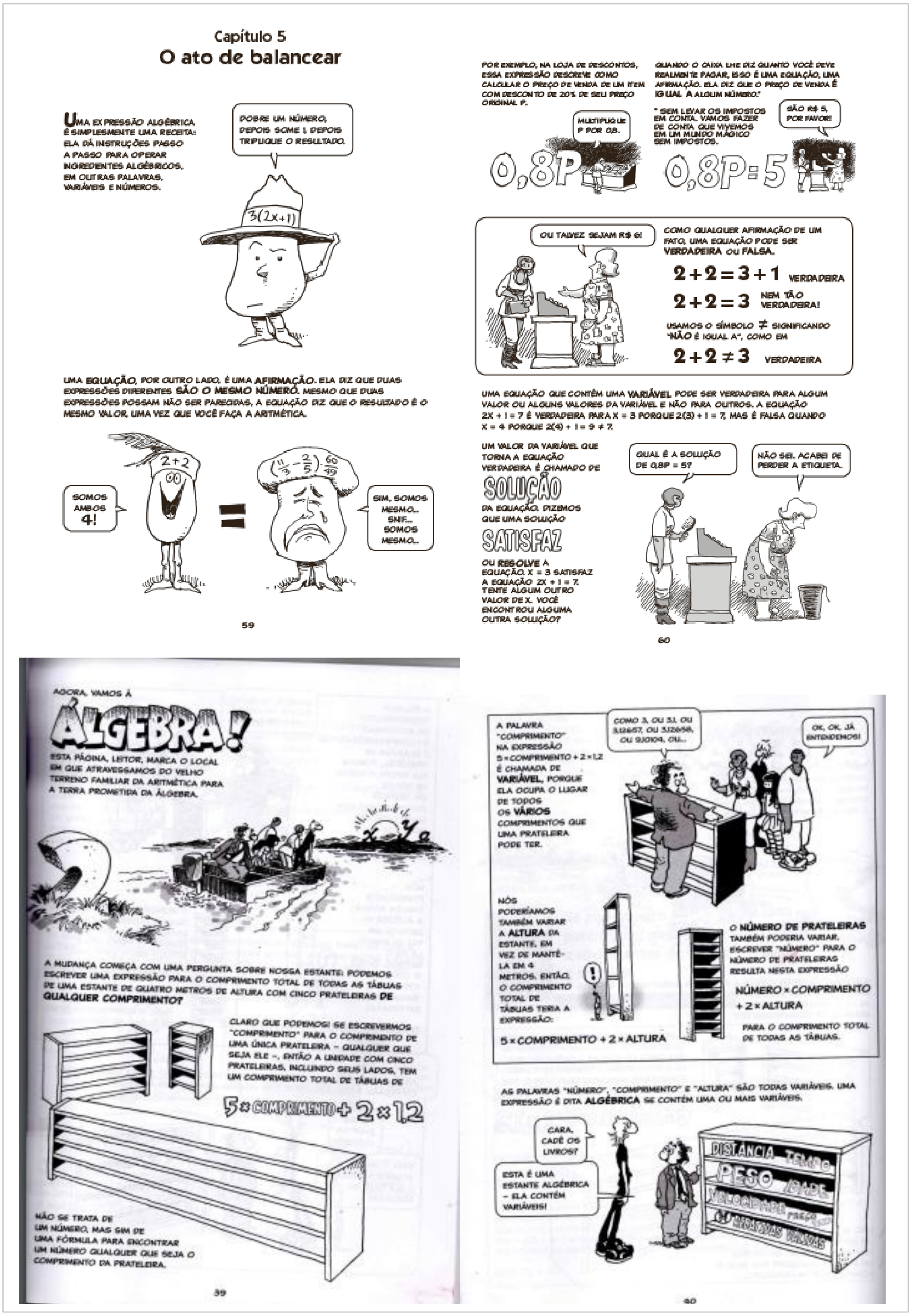
A leitura seguiu e discutiu-se cada parte das páginas lidas, levantando possibilidades, reforçando ou remodelando ideias, sanando dúvidas (os estudantes ajudavam-se no entendimento das ideias). Na sequência, passaram a acompanhar as imagens das situações-problemas do Livro Didático usado nesse episódio.

Os alunos demonstraram interesse e participação ativa durante toda a atividade, o que propiciou uma interpretação significativa das situações-problemas.

Além disso, foi possível identificar algumas dificuldades específicas em relação ao uso de letras e sua aplicação, sanadas de acordo com as dúvidas momentâneas apresentadas.

Figura 6 – Expressões e variáveis





Fonte: Gonick (2017)

A atividade com a semirrealidade proporcionou aos estudantes a oportunidade de revisitar os conceitos apreendidos na sua caminhada de vida escolar. Ademais, permitiu a interação e o trabalho em equipe, fortalecendo a compreensão mútua e a troca de conhecimentos entre os estudantes.

Ao final, distinguimos que a situação-problema pode envolver muito mais do que uma simples solução, deve dar ao estudante a oportunidade de desenvolver estratégias, de conjecturar, buscar diferentes formas de resolver, conforme sua realidade e raciocínio.

5.4 Episódio 4 – Situações do Cotidiano

Ambiente de Aprendizagem:
(6) – Referência à Matemática pura num Cenário para Investigação.

Tarefa Investigativa Proposta:
Pesquisar valores de alguns materiais sugeridos.

Desenvolvimento da Atividade Investigativa:

Essa atividade foi iniciada com um questionamento, professora e estudantes realizaram uma breve conversa reflexiva, levando em consideração conhecimentos matemáticos e vivência.

A primeira pergunta discutida foi: você já parou para pensar na quantidade de situações em que precisamos usar a Matemática no dia a dia? O diálogo levou ao entendimento de que algumas delas são bastante óbvias, como calcular o troco do supermercado ou organizar as contas do mês. Porém, outras não são tão evidentes. Muitas vezes, usamos nosso conhecimento com números e cálculos para realizar uma atividade e nem percebemos, como assevera esse estudante em sua fala:

E6: *Nas notas música, na melodia, na letra.*

A professora também perguntou aos estudantes: vocês já tinham pensado em como usamos a Matemática para ouvir música? Se vocês tocam algum tipo de instrumento musical, certamente estão acostumados a aplicar conceitos da Matemática na música.

Nesse tocante, um estudante supôs que, ao se perguntar quanto tempo falta para uma música chegar ao fim ou depois de quantos versos vem o refrão, está se aplicando raciocínio lógico-matemático na prática e sem nem perceber. E seguiu refletindo e inquerindo:

> E6: *Tem que ter um tempo, né? Murmúrios... E até a duração de cada uma delas, tem um compasso, não pode sair batendo.*

Essa fala se conecta com o que Oliveira (2015, p. 29-30) disserta em seu estudo, de que cordas mais curtas emitem sons mais agudos, isto é, a frequência da vibração de uma corda é diretamente proporcional ao seu comprimento. Essa constatação vem de Pitágoras, que "construíra uma escola musical baseada em razões simples entre os números inteiros".

Outrossim, a professora indagou se os pais e/ou responsáveis deles, quando vão a uma agência bancária ou abrem um aplicativo do banco, estão usando Matemática. Ao responderem positivamente a esse questionamento, indicaram que entendem a importância da Matemática na vida cotidiana, posto que chegaram à percepção de que em qualquer transação bancária é possível calcular porcentagens, juros compostos, adições, subtrações, e mais, consoante a declaração abaixo registrada:

> E: *Geralmente se comprar à vista tem diferença, porque ganha desconto.*

Na sequência, outra situação foi apresentada, o fato de ser muito comum compreendermos a Matemática no cotidiano, por exemplo, cozinhando:

> E6: *Fazer Miojo.*
> E4: *Comida.*
> E: *Tem que pôr os ingredientes na ordem certa, senão pôr a quantidade certa dá errada a receita. E no final dependendo tem que é, assar ou pôr na panela na temperatura certa senão queima.*

Nessa esfera, os estudantes produziram falas de que usamos a Matemática seja em uma receita encontrada na internet, ou fazendo um bolo de família passado de geração em geração. Ao serem instigados, questionados de o porquê o cozinhar e Matemática se relacionam, evidenciaram que, para cozinhar, é preciso planejar quantidades, garantir que haverá comida para todos; usar frações, e como exemplo, disseram: ½ xícara de leite.

Questionamos a respeito do uso do celular: “lembram que dissemos que há Matemática no cotidiano até mesmo em situações que nem imaginávamos? Em que outras situações além das que já conversamos há Matemática?”, foram provocados a pensar, citaram o uso do celular, visto que, segundo eles, era preciso pensar daqui a quanto tempo carregar a bateria, se há espaço para instalar mais um aplicativo, quanto espaço um jogo, vídeo ou aplicativo ocupa, quanto tempo para carregar. Trazemos, algumas dessas falas:

> E2: *Eu já tenho que chegar em casa e carregar. Aí precisa de um tempo, é matemática. O jogo no celular.*
> E: *Eu jogo muito no celular. Profe: Tá. Não tem um tempo pra baixar esse aplicativo?*
> E6: *Precisa baixar um aplicativo pra jogar e isso depende muito do quanto precisa dos MB.*
> E6/E2: *Quanto mais MB, mais...*

Ao instigar os estudantes, investigando o que eles sabem e, ao lhes dar pequenas pistas, a professora conseguiu levá-los a perceber o que a Matemática e o uso de celular têm em comum.

Outra relação que apresentaram foi a de Matemática com jogos eletrônicos. Apesar de ser uma característica comum na maioria dos *games*, hoje em dia, está ainda mais evidente. A professora perguntou: vocês sabiam que alguns dos jogos mais populares, hoje em dia, como Roblox e Minecraft, são usados inclusive para ensinar programação às crianças?

> E6: *É a quantidade de espaço. Tem o Kbyte, o Gigabyte, o Megabyte. O Megabyte e o Gigabyte. O jogo que eu falei, ele está uns 735 GB.*
> E3: *A gente tem que apagar todos os aplicativos privados.*
> E4: *Eu instalei dois jogos...*

Assim, refletindo e depreendendo como relacionar Matemática e cotidiano, ainda conseguiram associá-la ao cuidado da nossa saúde. Dentre suas afirmações, ponderaram que, para saber se estamos em forma, por exemplo, um dos principais indicadores é o índice de massa corporal (IMC) que é descoberto com uma fórmula matemática. Dito isso, consideraram importante pesquisar a fórmula na internet, o que fizeram com seus celulares. E nós consideramos pertinente apresentá-la aqui, uma vez que representa, nesse estudo, a autonomia, o Protagonismo desses estudantes em fazerem relações e pesquisarem.

$$\text{IMC} = \frac{\text{peso(kg)}}{\text{altura}^2\text{(m)}}$$

As falas abaixo demonstram mais elos que os estudantes conseguiram estabelecer entre a saúde e Matemática:

E6: *Tem sim. Lógico, o batimento cardíaco.*
E1: *Pressão, glicose, temperatura, vitamina D.*
E2: *Sim, índices de água?*

Embora o Português e a Matemática sejam considerados opostos, a realidade é que um pode ser utilizado em benefício do outro. Dessa assertiva, refletimos: a Matemática é importante para aprender a ler e escrever?

Assim como ter uma boa interpretação de texto é fundamental para entender os enunciados e melhorar o desempenho na Matemática , o contrário também é válido.

E: *Matemática. Português.*
E: *Tem que ler.*
E4: *Tem que ler, tem que entender tem que resolver.*

Feita essa discussão, outra situação foi posta: usamos Matemática quando fazemos compras, por exemplo, na livraria? Essa pergunta levou os estudantes a refletirem e constatarem que, para comprar em uma livraria, é preciso calcular quantidades, descontos, valores. Os alunos seguiram levantando hipóteses: é preciso pegar as quantidades certas de materiais para determinado período, é preciso comparar preços ou aproveitar promoções.

Quando compreendemos que os conhecimentos com números, formas e cálculos possuem uma relação prática e essencial em nossa vida, fica mais fácil afastar a ideia de que a matéria é “um bicho de sete cabeças”. Usar o raciocínio lógico-matemático é basilar para entender melhor o mundo em que vivemos. Às vezes, a aplicação desse conhecimento é tão básica que esquecemos dela, mas a verdade é que empregamos Matemática para andar, comer, brincar, conversar.

Nesse último encontro, procurou-se vivenciar e identificar problemas frequentes no cotidiano, mais precisamente envolvendo materiais escolares, como: comparar preços; quanto custam os materiais escolares em livrarias distintas, fazer simulado de várias compras; tipo de material; quais as vantagens e desvantagens de comparar os preços.

A partir das listas de pesquisas de alguns matérias escolares, conversou-se e foi feito o registro prático de forma investigativa frente aos valores apresentados:

A professora mediou o início da atividade, instigando-os a pensar em diferentes estratégias para resolver essa situação:

1) É possível gastar exatamente R$ 100,00 em cada livraria pesquisada? Se não, o que poderia ser feito? Que estratégias poderiam ser usadas? Converse com seus colegas:

> E6: *Profe não vai dar pra gastar exatamente cem reais, senão fico devendo noventa e cinco centavos.*
> E3: *Não dá pra comprar muitas vezes o mesmo produto?*
> E2: *Profe acrescentei aqui na minha conta quatro borrachas das cinco que eu já tinha.*

2) Se comprarmos um item de cada, em cada livraria, qual seria nosso gasto total? Analisando as livrarias pesquisadas, é vantajoso fazer pesquisa de preço? E o tempo computado para isso, vale a pena? Se você pudesse escolher sua lista de materiais, onde compraria?

> E6: *Acho que iam umas coisas em uma, umas coisas em outra.*
> E1: *Ajuda muito.*
> E6: *Sim, a qualidade, a marca, Influencia. Influencia quanto que ele vai...*
> E2: *Se vai durar, quanto vai ser útil.*
> E2: *Influencia o preço também.*
> E6: *O* meu faltou umas 5 coisas, não tem tudo na mesma livraria.

3) É possível ter um **x** valor, gastar R$ 124,50 e ainda restar na carteira R$ 5,00? Que valor corresponde o **x**? Temos uma só maneira de resolver este problema? Discuta com seu colega:

> E2: *É possível.*
> E6: *Com certeza, se tiver dinheiro.*
> E2: *É, se tiver dinheiro.*

4) Chegamos ao final de nossa pesquisa, o que você sentiu em fazer parte deste trabalho?

> E4: *Só me senti um pouco abalado porque comprei as coisas que não era pra comprar.*
> E2: *É fácil, é estranho.*
> E3: *Mais do que o BBB, não.*

5) Foi difícil participar das práticas?

> E1: *Um pouco. Foi estranho.*
> E4: *Só a torre de Hanói foi um pouco mais difícil.*
> E6: *A torre de Hanói foi estressante. A gente acabou perdendo umas contas.*

6) Você acha que tem dificuldades em aprender Matemática? O que você mais gosta ou menos gosta das aulas no dia a dia de Matemática?

> E1: *Fração.*
> E3: *Fração, com letra.*
> E6: *Eu gosto de fração.*
> E4: *É o melhor número decimal.*
> E1: *Eu não gosto de número decimal. Eu odeio número decimal.*
> E4: *Não, decimal de racional com vírgula.*

7) Se você pudesse dar um recado aos professores de Matemática, o que você diria?

> E1: *Poderia ter mais didática, eu acho melhor aprender.*
> E6: *Tipo, quando a gente está jogando um jogo, a gente consegue aprender melhor. A gente podia jogar esse jogo aqui.*

Por meio de uma aula dialógica, a professora buscou instigar os estudantes a pensar em ideias para constituir um Cenário para Investigação de acordo com a lista de materiais escolares pesquisados. Ao mesmo tempo foi o momento destinado a verificar as primeiras impressões quanto às atividades propostas mediante a observação de suas reações durante a apresentação das mesmas, afinal, a aceitação ao convite da professora/pesquisadora é considerada fundamental para que o Cenário para Investigação se constitua e a aprendizagem como ação ocorra, conforme Skovsmose (2014).

No que se refere à identificação da aceitação da turma com relação a um Cenário para Investigação proposto, esta não é imediata, uma vez que os estudantes estão acostumados ao Paradigma do Exercício.

> E1: *Gente, eu gostei. Pensativo é cansativo, sabe? Pensa só um pouquinho. Não, não um... Rosa, Vem Pra Cá.*

Contudo, foi possível observar atitudes e comentários dos estudantes sobre o chamado ao Cenário para Investigação, momentos de descontração e troca de informações, nas quais socializaram suas dúvidas e faziam conjecturas a respeito das atividades propostas, na busca por inspirações e, inclusive, opiniões. Esses momentos da atividade, permitiram, além do desenvolvimento do conhecimento matemático, senso crítico, raciocínio lógico, reflexões concernentes a aspectos do conhecimento adquirido e suas habilidades.

Diante disso, o professor deve assumir o papel de instrutor e mediador, como enfatizam Alrø e Skovsmose (2016), sem esquecer a importância da pesquisa, mesmo que os estudantes já conheçam o assunto ou tema escolhido. Expandir a discussão e gerar argumentos para desenvolver respostas fundamentadas é relevante.

Além disso, durante as atividades, foi notável como os estudantes estavam engajados com as atividades desenvolvidas, visto que não apenas proporcionavam a conexão da Matemática escolar com o cotidiano, as quais não deveriam ser somente sugeridas, mas também aceitas pelos estudantes para que o Cenário para Investigação fosse estabelecido. Podemos dizer que sim, é possível estabelecermos e oferecermos atividades que caminhem para um Cenário Investigativo, para a aprendizagem matemática, ao encontro dos interesses dos estudantes.

6 MOVIMENTO INVESTIGATIVO

Consideramos que em um Cenário para Investigação o estudante assume uma abordagem investigativa e tem a oportunidade de desenvolver suas próprias estratégias para a resolução de um problema, sem a utilização de “roteiros” já estabelecidos (Skovsmose, 2008).

Nesse viés, buscamos, como metodologia de pesquisa, oportunizar a vivência em um Ambiente de Aprendizagem que se afastasse do Paradigma do Exercício, rumo ao Cenário para Investigação. Queríamos conhecer como elaboram as “outras estratégias”.

Assim, a pesquisa foi ancorada pelo questionamento: como os estudantes do Ensino Fundamental estruturam a exploração, as conjecturas e a justificação ao participarem de uma atividade de Investigação Matemática que tematiza a Álgebra por meio de padrões e regularidades? E esta indagação também balizou a análise que segue.

Nesta seção, versamos acerca das categorias de análise emergentes das unidades de significado, enunciadas na seção anterior. Dessa forma, a análise e a discussão desenvolvidas neste texto foram divididas em três dimensões – Aceitando o convite à Exploração: Primeiras Provocações; Postura Investigativa; e A Cooperação Investigativa mobilizando o Protagonismo dos estudantes; as duas primeiras como unidades constituintes que construíram as significativas categorias. No texto, são enfatizados os discursos dos estudantes participantes da pesquisa com a expressão escrita em itálico, e a fala de cada estudante é representada pela letra E1, E2, E3, E4, E5, E6 e E.

6.1 Aceitando o convite à exploração: primeiras provocações

Segundo Skovsmose (2008), o Paradigma do Exercício pode ser contraposto a uma abordagem de investigação, passível de tomar muitas formas. Está baseado na educação tecnicista, em que o professor é o principal responsável pelos processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula, os conteúdos são aprendidos pela memorização, com uso das técnicas ensinadas pelo professor, e os estudantes as reproduzem em exercícios de fixação. Nesse paradigma, a ideia central é de que existe somente uma resposta correta. Já, na abordagem investigativa, é possível tomar diferentes encaminhamentos, criar caminhos na busca de solução. E por onde se inicia? Por um convite!

> O cenário somente se torna um Cenário para a Investigação se os alunos aceitam o convite. Ser um Cenário para Investigação é uma propriedade relacional. A aceitação do convite depende da sua natureza (a possibilidade de explicar e explorar as propriedades matemáticas de uma tabela de números poderá não ser muita atrativa para os alunos), depende do professor (um convite pode ser feito de muitas maneiras, e, para alguns alunos, um convite do professor pode soar como um comando) (Skovsmose, 2008, p. 18).

O que pode funcionar bem como ambiente de investigação para um grupo de estudantes, numa determinada situação, pode não ser um convite para outro grupo. Tendo em mente tal assertiva, nesta pesquisa, iniciamos o processo apresentando aos estudantes atividades investigativas, um "convite" à exploração, as primeiras provocações.

De acordo com Dicionário On-line, a palavra exploração remete à: "ação ou efeito de explorar, investigar, estudar, analisar: exploração científica" (EXPLORAÇÃO, 2023). Assim, ao falarmos de Exploração Matemática, dissertamos sobre a investigação, a análise e a exploração da situação matemática apresentada. Refletimos, então, sobre como o estudante aceita o convite e inicia o processo de explorar, investigar. Uma tarefa de investigação e exploração não é de resolução imediata, requer um esforço de compreensão, de resolução, a concretização de estratégias e uma reflexão sobre os resultados obtidos.

Quando apresentamos aos estudantes, no primeiro e segundo encontros, a Torre de Hanói e o Jogo de Varetas, mobilizamos de maneira lúdica a exploração do material e a formulações de questões, observamos que, inicialmente, manifestavam-se no sentido **de "encontrar" uma resposta rápida e pronta**, a partir da professora:

> E5: *Profe, não tem um jeito mais fácil? Profe será que é 2 no expoente -1.*
> E2: *Profe então agora tem que fazer dois virgula quatro menos sete e o resultado divide por cinco?*

Além das indagações que os estudantes faziam, usavam uma linguagem espontânea para conceituar a dificuldade que a disciplina de Matemática apresenta no dia a dia de uma sala de aula:

> E1: *Tá bugado o cérebro.*

> E4: *Eu não sei fazer as contas de Álgebra.*
> E6: *Não resolvendo. Pensando. Chorando, pensando. As vezes tem coisa que não tem solução,*
> E4: *Eu não estou entendendo nada, eu estou entendendo um pouco.*
> E4: *Só falta ter letras negativas.*

Frente às dificuldades apresentadas, os estudantes faziam um movimento para encontrar as principais relações entre o jogo e os processos algébricos, **para construir um caminho**, isso se mostra quando ouvimos:

> E2: *Ninguém para mexer. Não pode, não é a regra. Qual que era a regra? A gente tem que inverter, porque o azul é o primeiro. Esse daqui é o primeiro.*
> E4: *Mas se o Henry tivesse cinco notas de cinco? É uma expressão algébrica, é ou, não é?*

A partir destes comentários, é possível observarmos também a curiosidade que a atividade despertou nos envolvidos. A Exploração Matemática pode ser realizada, desde a Educação Básica até a pesquisa avançada em Matemática, pode ser aplicada a qualquer área da disciplina, geometria, cálculo, estatística, incluindo outros meios.

Quando trabalhamos com a Exploração Matemática, lançamos os estudantes à busca crítica e à descoberta de novas ideias e conceitos na Matemática, na proposta aqui discorrida, não teve um caminho pré-determinado a seguir. Em vez disso, os estudantes foram encorajados a pensar de forma independente, a fazer suposições e a testá-las, a observar padrões e a procurar conexões entre diferentes áreas da Matemática.

Ao longo do processo, oportunizou-se ao estudante o despertar da curiosidade e interesse, desenvolvendo o pensar com criticidade, raciocínio lógico. Constatamos isso em diferentes situações, por exemplo, quando perguntados sobre a Matemática e a relação com o cotidiano:

> E5: *Um copo de leite. Um copo de leite. Coisas. Organizar as coisas. Medidas. Dívidas. É o que?*
> E1: *Pressão, glicose, temperatura, vitamina D.*
> E6: *Tem sim, lógico, o batimento cardíaco,*
> E2: *Henry: Sim, índices de água?*

Alguns exemplos de Exploração Matemática incluem a investigação de padrões dos diferentes formatos de representação e resolução de um problema, a experimentação e a busca de generalizações a partir de exemplos específicos pode ser feita individualmente ou em grupo, conforme segue:

> E2: *A letra não muda nada, o que muda é os números. Não muda a conta. Pode ser negativo, ou não.*
> E6: *Por dois, multiplica por dois..., isso é uma expressão?*

Compreendemos que a Exploração Matemática e Investigação Matemática são dois processos interrelacionados que envolvem conceitos e padrões matemáticos, a formulação de conjecturas e a busca por respostas:

> E6: *Por dois, multiplica por dois..., isso é uma expressão?*
> E1: *Tem como, número com vírgula transforma em fração. Aqui, eu tenho aqui, olha lá.*

Explorar e investigar são essenciais para o desenvolvimento da compreensão da disciplina e da capacidade de resolver problemas matemáticos, ajudam os estudantes a desenvolver habilidades de pensamento crítico, criatividade e resolução de problemas, além de fornecer a oportunidade de explorar e descobrir a beleza da Matemática por conta própria.

Ainda, podemos pensar a atividade investigativa vinculadas à diversão, como a proposta da Torre de Hanói e o Jogo de Varetas para a exploração da Álgebra. Nesses jogos, o objetivo foi resolver uma série de movimentos e construir uma lei de formação que utilizasse a Álgebra como equações numéricas e/ou algébricas para descobrir os valores das variáveis.

Ademais, o jogo permitiu a prática de habilidades importantes da Álgebra, como a resolução de equações, a simplificação de expressões e a manipulação de variáveis, auxiliando no desenvolvimento do raciocínio lógico e a capacidade de fazer inferências a partir das informações apresentadas, como eles mesmos relatam:

> E2: *Eu escolheria o primeiro que é cheio de coisa. O meu resultado eu fiz mais ou menos tentando botar o material pra que pra mim faltava, e deu certo.*

Esses jogos podem ser adaptados para diferentes níveis de dificuldades e conteúdos específicos, facultando sua utilização em diferentes etapas do ensino da Álgebra. Os estudantes tiveram a oportunidade de aplicar os conceitos aprendidos em situações práticas, desenvolvendo habilidades matemáticas e fortalecendo seu entendimento.

Apesar de conseguirem estabelecer uma relação entre o jogo e a Matemática, não usaram a lei de formação para conceituar e representar expressões algébricas que corriqueiramente podem ser encontradas no Paradigma do Exercício; em alguns momentos, exprimiram em linguagem verbal:

> E2: *Tem que ler, tem que entender tem que resolver. Matemática e leitura.*

Por sua vez, a identificação de regularidades propiciou a generalização da situação e a sua representação algébrica. A situação ajuda a promover a compreensão da linguagem algébrica utilizada e a interpretação da representação da generalização contribui para uma correta interpretação dos resultados. A cultura da sala de aula vai se transformando e integrando a noção que os estudantes podem colaborar com diferentes respostas, discordar e argumentar uns com os outros.

No próximo subitem, a partir do primeiro contato exploratório, veremos os Caminhos Investigativos: O que acontece se?

6.2 Postura investigativa

Desde as afirmativas estudantis, evidenciamos que a Investigação Matemática é um processo mais estruturado, que envolve definir objetos claros, formular problemas e discorrer estratégias para resolvê-los. Os estudantes foram encorajados a desenvolver habilidades de raciocínio lógico, investigar padrões e argumentos matemáticos formais para apoiar suas conjecturas.

A partir das atividades propostas, observamos que um Ambiente de Aprendizagem, na perspectiva investigativa, pode ser um grande aliado ao desenvolvimento do pensamento crítico e lógico. Através delas, os estudantes foram **desafiados a resolver problemas e construir caminhos em busca de soluções e justificar seus resultados,** exercitando, assim, suas habilidades matemáticas. As falas de E4 e E6 ilustram isso:

> E4: *Não pode deixar que falte nenhum espaço.*
> E6: *Não precisa. Botar rosa primeiro, tem que mover, marrom primeiro embaixo de rosa certo? Estou arrumando não, não, deixa um rosa E. Marrom, já vai ficar, pera é o vermelho laranja, rosa, marrom, verde, rosa, azul, isso. É, eu acho que eu tive uma ideia, eu acho. A gente tira o marrom.*

Com base nessas manifestações, a professora sugeriu que analisassem a situação de forma organizada e sistematizada. Propôs que fizessem uma tabela como resultado dos jogos, anotassem valores, hipóteses de soluções, registros de informações das atividades propostas. Conforme preenchiam a tabela, percebiam padrões e observaram que, o que servia de padrão para uma atividade, poderia não servir para outra. Com base nisso, começaram a contar com que frequência os resultados se repetiam. Estas falas ratificam nossa constatação:

> E6: *Torre de Hanói e a Matemática, entendi que: X número de peças igual a X número de movimentos, né!*
> E6/E2: *E a quantidade de peças influenciando os movimentos. Aqui é Álgebra, Matemática. É Álgebra, é matemática, Álgebra tem Álgebra junto, né?*

Essas atividades permitiram aos estudantes revisitarem seus conhecimentos matemáticos de adição, multiplicação, potenciação e outros, reconhecendo padrões e organizando informações, ao mesmo tempo em que eram incentivados a refletir e buscar soluções de maneira autônoma. Outrossim, compartilharam suas descobertas e trocaram ideias sobre como resolver:

> E4: *Uma de cada vez, não pode colocar uma maior em cima de uma menor.*
> E5: *Põe o azul aqui em cima... Não dá para botar assim, se não ficar errado. Mas agora.*
> E3: *Tira esse aqui, esse aqui vem prá cá, ó ...embaixo do laranja, fazendo agora, é possível.*
> E2, a: *Henry: Pera aí, que aí vai um de cada vez. Uma de cada vez, oh, tem que ser esse aqui. Laura, isso tem que ser aqui. Espera, tem que ser. É!*
> E1: *Já tenho uma estratégia que vai passar demais!*

Nesse âmbito, após serem apresentados ao Ambiente de Aprendizagem com referência à realidade em Cenários para Investigação, que, para Alrø e Skovsmose (2004), diz respeito ao diálogo como meio de comunicação e deve ser planejado para oferecer significado àquilo que os estudantes produzirão na atividade. Skovsmose (2011) explica que os estudantes são convidados a explorar hipóteses e fazer descobertas, destacando que o mais importante não é chegar a resultados genuínos, o primordial é que consigam realizar suas próprias descobertas.

Quando analisamos e comparamos a pesquisa realizada na livraria com dados do cotidiano, foi possível divisar, através dos comentários dos estudantes, o entendimento e a compreensão dos fatos, ao ouvirmos os seguintes comentários, diante do questionamento da pesquisadora, referindo-se a que quantidades que estes precisariam:

> E1: *Tem que comprar uns 10 cadernos.*
> E6: *Umas duas borrachas.*
> E2: *Uma borracha de reserva, eu sempre perco borracha.*
> E4: *Estojo, um só, ou dois dependendo, tem o do ano passado.*
> E5: *Apontador, um só, uns cem na verdade, não duram. Canetas? Nossa, três. Pera aí. Cinco. Seis, dois. Tem duas pretas, duas azul e uma vermelha...*

A partir dos caminhos da Investigação Matemática, os estudantes conversaram, fizeram conjecturas e justificação, desenvolveram uma postura investigativa face ao fenômeno. Essas conjecturas serviram como hipóteses iniciais para resolução de problemas. Skovsmose (2014) afirma que a aprendizagem necessita de ação e de iniciativa daquele que está nesse processo.

No entanto, ressaltamos que as conjecturas feitas pelos estudantes podem estar corretas ou não. Para verificar se uma conjectura é válida, precisam justificá-la através de argumentos lógicos e/ou demonstrações matemáticas. As dificuldades enfrentadas nesse processo envolvem a falta de familiaridade com o tema em questão, a dificuldade em compreender os conceitos matemáticos envolvidos, a falta de habilidades de raciocínio lógico e a falta de prática em resolver problemas matemáticos, de certa maneira, um vício que o Paradigma do Exercício exerce sobre estes. Observemos as seguintes falas:

> E2: *Profe. as tábuas horizontais são as prateleiras. né? Ali eles têm, 5 x 3 + 2 x 4; 15+8= O número de prateleiras, que é o cinco e o tamanho das prateleiras, que é o 3 m?*
> E6: *O seguinte, este faço verde para cá, aí. Ai, ai, ai. A gente tem que colocar aqui. Como é que eu vou colocar o rosa? Não vou colocar assim também. Pode, é? Não sei... Então tá!*
> E2: *É mais ou menos do tipo encontre o valor de a.*

Sempre que necessário, e com base nos comentários dos estudantes, evidenciava-se a confirmação das estratégias que estabeleciam, a fim de fortalecer a sua autoconfiança frente as conjecturas, confirmadas pela pesquisadora: *"as letras representam um valor, um elemento desconhecido".* Ou até mesmo: *"é possível gastar exatamente cem reais? Que estratégia poderia ser feitas? É possível? Não é possível? O que que vocês poderiam propor a vendedora pra resolver isso?".*

É essencial que os estudantes recebam *feedbacks*, seja através da correção de exercícios, da discussão em grupo ou da apresentação de argumentos e justificativas, dessa forma, poderão desenvolver suas habilidades de Investigação Matemática, construindo conjecturas cada vez mais sólidas, justificadas e superando as dificuldades encontradas.

> Compreender como os indivíduos aprendem continua sendo um grande desafio. Sabemos que as experiências de vida têm peso na aprendizagem de cada pessoa. sendo assim, é muito difícil fazer generalizações nesse campo, e há um debate intenso entre os pesquisadores da aprendizagem talvez com mais pontos em discussão do que pontos consensuais (Soares, 2009, p. 12).

Em uma atividade de Investigação Matemática, é comum que os estudantes se deparem com diferentes posturas de dificuldades, conjecturas, caminhos a serem seguidos e questões do tipo “e se...”. Essas situações fazem parte do processo de investigação e são imprescindíveis para a construção do conhecimento. Essas dificuldades podem ser tanto técnicas, relacionadas a fórmulas ou procedimentos, quanto conceituais, envolvendo a compreensão dos fundamentos matemáticos. O questionamento “o que acontece se...” é muito comum durante à Investigação Matemática. Ele surge quando os estudantes exploram diferentes possibilidades e tentam antecipar os resultados de determinadas situações. Esse modo de questionar ajuda a desenvolver o pensamento crítico e a construir argumentações baseadas em evidências. Os estudantes participantes tiveram inúmeros momentos de questionamento “e se.”, “o que acontece e...”:

> E2: *Imagina 64 pecinhas? Como eles fizeram? E se nós começar assim? O dobro de três é seis mais um é sete. O dobro e o dobro de quatro? Alguém tem que contar.*
> E3: *Se nós pegarmos 2 ao quadrado dá 4, três ao quadrado da 9, se eu pegar 2 no expoente 3 dá 8, se eu pegar 2 no expoente 4, dá 16. Então só potência não serve, então vamos ter que fazer + alguma coisa ou menos alguma coisa. 76.4 no expoente 3 dá 31? O N é o expoente? E o M é o que? O que é a base?*

As conjecturas, por sua vez, são suposições feitas pelos estudantes com base em seus conhecimentos prévios e nas observações durante a investigação. Consoante Alrø e Skovsmose (2010, p. 123), “realizar uma investigação significa abandonar a comodidade da certeza e deixar-se levar pela curiosidade”. Essas suposições servem como ponto de partida para a construção de argumentos, análises e provas matemáticas.

> Qualquer Cenário para Investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do Paradigma do Exercício, mas ser hábil para atuar no novo ambiente. A tarefa é tornar possível que alunos e professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma atividade produtiva e não uma experiência ameaçadora. Isso significa, por exemplo, a aceitação de questões do tipo "o que acontece se..." (Skovsmose, 2008, p. 36).

As atividades de Investigação Matemática são extremamente enriquecedoras, permitem demonstrar a importância da construção matemática, explorar diferentes caminhos, abordagens e comprovação, são elementares para desenvolver habilidades como observação, análise de padrões e dedução de conjecturas, incentivam a criatividade e o pensamento crítico, uma vez que é preciso questionar e testar diferentes hipóteses ao longo do processo.

> Nas atividades em Cenários para Investigação, abrem-se caminhos para que os alunos questionem, explorem e procurem explicações, (...) cria-se a possibilidade para que os alunos produzam significados para os conteúdos e conceitos matemáticos (...) sendo assim, ao realizar uma atividade de investigação, o aluno poderá construir relações entre a prática observada e a teoria, percebendo que os conceitos foram fundamentados pela experimentação e pela afinidade com situações da realidade (Krefta; Trevisan; Trevisan, 2023, p. 364).

Nesse rumo, corroboramos Skovsmose (2008, p. 21), que afirma: "um Cenário para Investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações", e é somente a partir da aceitação desse convite que se consolida um cenário. A comprovação dos estudantes diante de uma atividade que envolva Cenários para Investigação pode ser observada em pequenas conversas que ocorreram no momento da aplicação das atividades, tais como:

> E6: *Quanto mais vai montando, vai modificando, tipo, o número de peças.*
> E2: *Então, com as minhas são fáceis, eu só tenho três tipos de cor. Vejam: Quarenta, cinquenta, sessenta e cinco, sessenta.*
> E6: *Dois vírgula quatro, se são duas laterais? Sete metros de tábua e cinco prateleiras. Não temos as prateleiras aqui, mas podemos olhar essas aqui da sala.*

Os estudantes, durante as atividades, estavam envolvidos, engajados e interessados, demonstraram empenho ao realizar as tarefas propostas, participando ativamente das discussões e contribuindo com ideias e soluções, com curiosidade ao fazerem questionamentos pertinentes ao tema em estudo. Sentiam-se pertencentes ao processo de investigação, buscando a compressão dos conceitos e respostas mais aprofundadas:

Salientamos o envolvimento e comprometimento entre os estudantes, com opiniões, conjecturas e argumentos embasados em evidências, ao analisarem hipóteses, como as seguintes falas revelam:

> E2: *Isso é Álgebra, quando misturamos letras, números. Agora vamos jogar varetas? Tem que tirar todos e não pode mexer as outras.*
> E6: *O seguinte, este faço verde para cá, aí. Ai, ai, ai. A gente tem que colocar aqui. Como é que eu vou colocar o rosa? Não vou colocar assim também.*
> E1: *Quantos movimentos deu? Eu não contei, quais são as regras do jogo?*

A partir do exposto, observamos o quão são capazes de fazer diferente, de planejar experimentos ou coletar dados de forma a resolver situações específicas, identificar inconsistências, tirar conclusões e propor soluções embasadas em evidências, esse movimento de **avaliar e analisar as informações** coletas durante uma investigação é fundamental.

Realçamos que a inquietude e a insegurança também fazem parte do processo de aprendizado, surgindo por várias razões. Nesse sentido, os estudantes apresentaram dúvidas e incertezas face a um novo desafio:

> E5: *Tira esse aqui, esse aqui vem para cá, ó. ...embaixo do laranja, fazendo agora, é possível. Aham. Ai meu Deus, agora ... Quando a gente pensa que está acabando, a gente é se complica mais antes de veio aqui. Aqui vem aqui.*

Contudo, isso não deve ser visto como um indicativo de falta de comprovação dos aprendizados, talvez, estivessem sentindo-se sobrecarregados com a tarefa, porque não sabiam por onde começar ou como abordar o problema, apresentaram inseguranças e cometeram erros ao não obter os resultados esperados. Essas inseguranças podem ser interpretadas como um sinal de que estavam buscando compreender e se apropriar dos conteúdos:

> E 4: *Tem que desmanchar tudo de novo, pra. Pra pôr o verde embaixo?*
> E 2:*Henry: Pera aí, que aí vai um de cada vez. Uma de cada vez, oh, tem que ser esse aqui. Laura, isso tem que ser aqui. Espera, tem que ser. É.*
> E2: *Tá, o marrom fica aqui no melhor. Vermelho, laranja, rosa, marrom, ******, só bota esse aqui. Calma, isso aí gente, vai botar isso? Um deixar a base assim. E se você for?*

Nesse sentido, a professora ocupou-se de passar aos estudantes confiança e segurança diante dos caminhos tomados frente aos desafios, mobilizando-os com falas[8] como: "*Não vão desistir, não podemos, imaginem que na lenda eram 64 peças. Vocês estão com sete. Vamos lá... isso aí. Pensamento positivo*".

Os estudantes eram encorajados a expressar suas dúvidas e inquietações ao receber apoio. Porém, em alguns momentos, ainda havia insegurança quanto às suas habilidades e capacidades de resolver problemas, que analisamos como um fato positivo, sinal de que estavam avaliando as situações desencadeadas no processo:

> E1: *Eduarda: dá pra começar de novo.*
> E2: *Meu Deus do céu. É melhor ficar tentando.*
> E2: *Alguma coisa aí que eu não estou? Não. Estou fazendo certo. 24 vocês já estavam? Sim, se não se perderam. Ter que ver agora, agora, agora.*

Nós, as/os professoras/es, somos os grandes aliados e responsáveis por fornecer orientação clara sobre como abordar a tarefa, encorajá-los a fazer perguntas e buscar ajuda quando necessário. Precisamos incentivá-los a trabalhar em equipe e a colaborar uns com os outros, compartilhando ideias, apoiando-se mutuamente na resolução de problemas. Também é importante oferecer recursos adequados, como livros, artigos científicos, ferramentas de pesquisa e acesso a laboratórios ou equipamentos específicos, isso ajudará na autoconfiança.

No geral, uma comprovação diante de uma atividade de Investigação Matemática que envolve problemas é um processo cuidadoso e sistemático que combina a aplicação de técnicas matemáticas com o entendimento do problema no contexto real. Isso permitiu aos estudantes chegarem a soluções confiáveis e fazerem afirmações válidas com base em seus resultados:

> E2: *Não é oito vezes seis que dá quarenta e oito? E daí a gente tem que botar uma vírgula, daí vai sobrar, agora vírgula... Dois, que dá dezesseis. Quatro. Já. Agora. Cinco. Bota o zero e faz o cinco, então seis vírgula vinte e cinco.*

Quando se trata de explorar problemas de Álgebra mediante padrões e regularidades, a semirrealidade é uma abordagem eficaz. Envolve a criação de

---

[8] Intervenções da professora pesquisadora.

situações que se assemelham à vida real, mas que podem apresentar elementos fictícios adicionais para facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos.

Para trabalhar a semirrealidade, devemos criar situações que sejam relevantes para os estudantes e que possibilitem a aplicação dos conceitos de Álgebra. Por exemplo, o jogo da Torre de Hanói, o jogo de varetas e problemas, por intermédio deles, puderam identificar e experienciar equações e construir padrões para comprovar e resolver as indagações levantadas.

Outra estratégia eficiente neste trabalho foi proporcionar aos estudantes o trabalho em grupo, que viabilizou a discussão de diferentes abordagens, estratégias, estabelecendo conexões com o que era proposto. Essas estratégias os ajudaram a compreender e aplicar os conceitos matemáticos de forma significativa.

6.3 A cooperação mobilizando protagonismo dos estudantes

A partir das categorias de análise discorridas nos itens anteriores, é possível observar que, durante a prática das Atividades Investigativas, estiveram presentes os elementos como **estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar**, mesmo que, em muitos momentos, não explícitos diretamente nas falas, mas no contexto das ações e diálogos estabelecidos entre pesquisadora e estudantes.

Nesse âmbito, a comunicação estabelecida oportunizou ao estudante desenvolver habilidades cognitivas, como a capacidade de análise, síntese, abstração e generalização. Além disso, foram incentivados a trabalhar em grupo, discutindo suas ideias e argumentando como os colegas e com a professora, o que promoveu a colaboração e a troca de conhecimentos entre os pares.

Num primeiro momento o **estabelecimento de contato** com os estudantes, foi realizado em um ambiente de confiabilidade e sintonia, ocorrendo conexão entre eles, e entre eles e a professora. Foi criado um espaço de confiança e segurança, possibilitando que os estudantes pudessem questionar sem medo de represália, deboches ou menosprezo por suas dúvidas, logo, através das perguntas buscavam chegar/formular uma resposta, com respeito e responsabilidade.

Estabelecer contato significa “sintonizar um no outro” para iniciar a cooperação.

Quando os estudantes vivenciaram uma experiência que os levava a descoberta de algo novo, como a Torre de Hanói, foi possível **perceber** diversas perspectivas no processo de investigação, observando como cada estudante entendia o problema, sem rejeitar o novo, que despertou o interesse em fazer novas conjecturas e propostas para resolver. A partir do diálogo e das trocas, foram construindo coletivamente uma resolução.

Ao longo do desenvolvimento da atividade de Investigação Matemática, os estudantes foram tornando-se aptos a expressarem-se em sua própria perspectiva, que pode ser reconhecida em termos matemático, pela professora e pelo grupo. Ao **reconhecer** que os estudantes conseguem pôr em prática suas ideias e discutir, foi possível oferecer outros subsídios de aprendizagem, incluindo novos conteúdos para serem trabalhados de forma a construir o conhecimento, e, por conseguinte, o estudante ser responsável pela busca e elaboração de raciocínios matemáticos, sentindo-se motivado e engajados na disciplina.

Em alguns momentos observamos que os estudantes não conseguiram **pensar alto**, principalmente no início da atividade, com medo de represálias e/ou críticas por ter seu pensamento exposto, e/ou estar sendo avaliado, embora o ambiente fosse seguro. O medo da reprovação, pelo grupo, é um obstáculo à CI, é necessário compreendermos que os estudantes são envoltos em um clima de sala de aula totalmente diverso do Ambiente de Aprendizagem proposto nesta pesquisa, assim, sua manifestação pode ser gradual, à medida que sente confiança em si e no grupo. Ainda assim, eles constantemente expressavam seus argumentos e defendiam a forma ou caminho que acreditam ser a melhor, conseguindo se **posicionar** junto ao grupo. Levantar ideias e pontos de vista como algo a ser examinado e testado, algo possível de **reformular** é fundamental para o processo, pois considera ideias que levam a um entendimento comum do problema, a partir das perspectivas individuais.

Nesse diálogo é que emergia o **desafiar,** o jogo-de-perguntas em que era possível desafiar as perspectivas, que envolviam tanto os estudantes como a professora. Segundo Alrø e Skovsmose (2006, p. 71) “esclarecer perspectivas é uma precondição para que se possa *desafiar* de forma ‘qualificada’”. A intenção das perguntas era mobilizar novas perspectivas dos estudantes, portanto, **avaliar** essas perspectivas fez parte do processo investigativo.

No decorrer das atividades, os estudantes também avaliavam as perspectivas apresentas, na medida em que conseguiam “avançar” na solução do problema, sem ter perspectivas “corretas”, mas de como chegar a um propósito comum.

Assim, podemos inferir que a atividade proposta contribuiu significativamente para que os estudantes e a professora estabelecessem uma comunicação de qualidade em sala de aula, consoante um Modelo de Cooperação Investigativa (CI).

Neste cenário, observamos que o estudante passou a tomar decisões e assumir a responsabilidade por sua aprendizagem, sendo protagonista. Ao trabalhar com dados do cotidiano, promoveu a criatividade na busca de soluções, foi incentivado a explorar diferentes estratégias e a testar ideias para resolver problemas matemáticos, formular hipóteses e soluções, construir perspectivas.

No entanto, precisamos nos atentar que há obstáculos para a CI, entre eles, Alrø e Skovsmose (2006) aludem à possibilidade de algum elemento de comunicação exaurir-se, levando ao padrão tão comum ainda, do tipo monólogo, ou a um jogo de perguntas respostas, nele, o professor pergunta, o estudante responde e o professor avalia. Ademais, a CI pode ser afetada pelo cronograma, ou seja, normalmente, nesse caso, a relação é com o tempo, circunstâncias em que o/a professor/a informa aos estudantes que não há mais tempo para diálogos e reflexões e orienta como deve ser feita/resolvida uma situação/problema. O motivo, em grande parte, é a obrigação que o professor sente de cumprir o programa curricular.

Nessa ótica, os obstáculos à CI não podem ser interpretados somente como advindos pelo professor, uma vez que os estudantes "vêm à sala de aula conhecedores de certo discurso escolar que influencia suas expectativas e antevisões sobre as atividades a serem desempenhadas em sala de aula" (Alrø; Skovsmose, 2006, p. 74). Costumam esperar que o professor apresente o conteúdo que quer que aprendam, esperam ser comandados e avaliados pelo professor, além disso, não querem a responsabilidade de ter de fazer contribuições. Acrescenta-se a autocensura do estudante, que pode ter uma ideia de como tratar certo problema, mas ele prefere não fazer menção na presença do professor.

Alrø e Skovsmose (2006, p. 74) referenciam também, como outro obstáculo à CI, para alguns alunos, o fato de

> [...] que os atos de comunicação inerentes ao Modelo-CI exigem dos alunos determinadas habilidades verbais. Estudantes que se expressam com interesse e desenvoltura podem ser favorecidos em detrimento de outros, por exemplo, aqueles que são mais empenhados, mas ficam calados, e terminam por desenvolver seu interesse pela Matemática em isolamento.

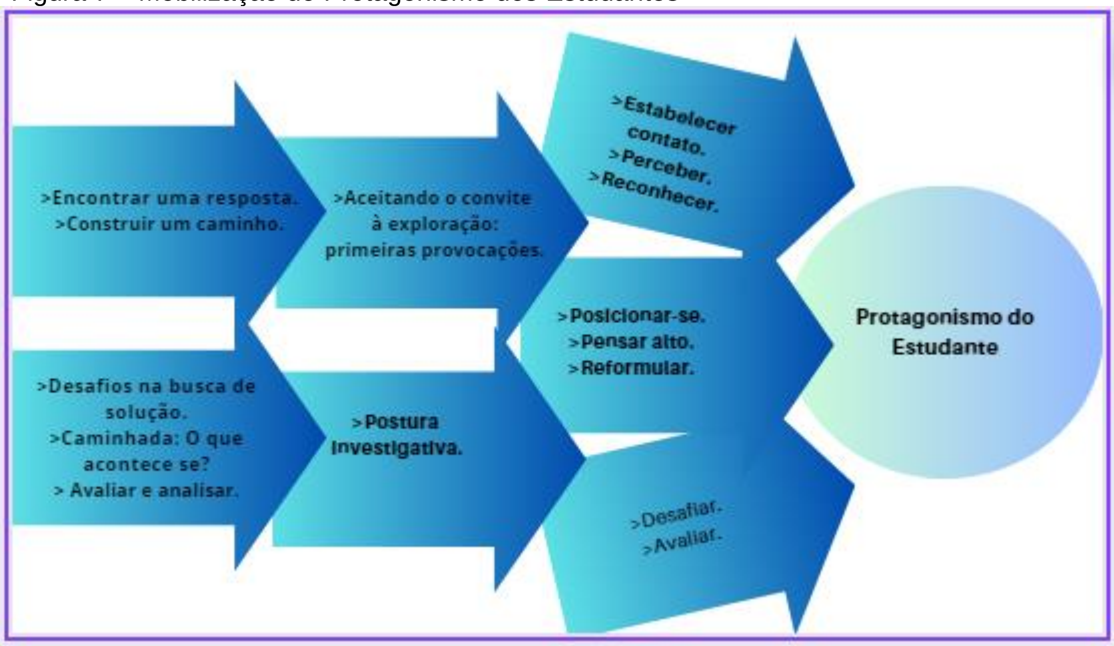
Acreditamos que o estudante que aprende a argumentar e justificar seus raciocínios matemáticos passa a ter maior interesse pela Matemática.

> Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa (Moran, 2013, p. 1).

A aprendizagem baseada em fatos ou problemas que envolviam a semirrealidade e/ou a realidade, com ligação com sua vida fora da sala de aula, propuseram aos estudantes tomarem atitudes para resolução que equacionaram a discussão e raciocínio individual, e em grupo, funcionando como um "apoio" as descobertas.

A partir dos elementos das categorias de análise emergentes "Aceitando o convite à Exploração: primeiras provocações" e "Postura Investigativa" em nosso estudo, e dos argumentos apresentados sobre como eles anunciam um Modelo de Cooperação Investigativa (CI), defendemos então o modelo proposto mobiliza o protagonismo do estudante, cuja relação apresentamos na Figura 7:

Figura 7 – Mobilização do Protagonismo dos Estudantes



Fonte: Elaborada pela autora (2023)

O protagonismo é substancial em qualquer atividade, especialmente na Matemática, para o desenvolvimento cognitivo e aprendizagem significativa do estudante. Nesse contexto, a proposta desenvolvida que explorou padrões e regularidades na Álgebra, aqui, em específico, permitiu que os estudantes assumissem papel ativo na construção do conhecimento matemático, a partir de uma perspectiva de Cenários para Investigação, através de uma construção dialógica entre professor e estudante, numa ação de cooperação, em que o estudante aceita o convite e, numa relação de troca, ocorre a construção de saberes e se dá o aprendizado.

> Nesse viés, na atividade matemática investigativa, os alunos assumem uma atitude crítica e ativa, em que o questionamento, a argumentação e a fundamentação das ideias são características relevantes para a aprendizagem (Silva, 2018, p. 79).

Faz-se necessário definirmos o que é protagonismo, e o fazemos consoante as palavras de Silva, Cruz e Silva (2013, p. 15):

> O termo Protagonismo surgiu da junção das raízes gregas *proto*, que significa primeiro/principal e *agon*, que significa luta. Então, Protagonismo é o ato principal do seu desenvolvimento, ou seja, corresponde à ação, à interlocução e à atitude do jovem com respeito ao conhecimento e à aquisição responsável do conhecimento e que seja eficiente para sua formação, para seu crescimento, para sua conclusão como cidadão.

Para tanto, Nazario, Santos e Ferreira Neto (2023), reiteram que é preciso que o protagonismo do estudante se torne o centro do processo educacional, aprimorando situações nas quais possa exercitar e desenvolver a iniciativa (ação), a liberdade (opção) e o compromisso (responsabilidade). Dessa maneira, deve sair de uma condição passiva, enquanto estudante, para uma posição de participação ativa.

É desafiador trabalhar numa proposta investigativa em que o estudante é protagonista do seu aprendizado, porque foge ao “habitual”, imprevisível, requer muito preparo do professor. Inovar exige tempo, estudo, dedicação, força de vontade e, principalmente, segurança no que se está fazendo. Porém, diante de um ambiente de aprendizagem em que os estudantes passam a fazer conjecturas e a testá-las, é gratificante e envolvente, dá ao professor a sensação de que esse deve ser o “habitual”.

Ao investigar padrões e regularidades na Álgebra, os estudantes foram desafiados a observar, descrever e generalizar as relações matemáticas existentes. Foram encorajados a fazer perguntas, levantar hipótese e testá-las, utilizando a própria lógica e intuição matemática. Cabe, aqui, lembrar que a BNCC (Brasil, 2017) passou a abordar os estudos de Álgebra e suas aplicações nos anos iniciais devido a importância de trazer o tema desde cedo, para que os estudantes se familiarizem e façam relações com a nomenclatura e com os objetos de conhecimento, desenvolvendo as habilidades necessárias.

Nessa ótica, frisamos que, quando nos propomos a fazer a atividade do jogo em um Cenário para Investigação, oferecemos desafios aos estudantes, levando em conta as habilidades intrínsecas e sempre buscando instigá-los para que houvesse participação, engajamento do grupo e, ao mesmo tempo, que acontece, de fato, o aprendizado em cada ação apresentada. Os jogos são estratégias importantes de encantamento para uma aprendizagem rápida e próxima do cotidiano. É muito importante que os estudantes aprendam fazendo, até porque estamos trabalhando com uma geração acostumada a jogar.

Ainda, ao pensarmos em atividades que envolveram dados do cotidiano, evidenciamos que se tornou mais fácil realizarem relações matemáticas, visto serem circunstâncias do dia a dia, e, em virtude disso, que fazem sentido, têm significado para eles.

> A aprendizagem é mais significativa quando motivamos os alunos intimamente, quando eles acham sentido nas atividades que propomos, quando consultamos suas motivações profundas, quando se engajam em projetos em que trazem contribuições, quando há diálogo sobre as atividades e a forma de realizá-las (Moran, 2013, p. 1).

Ao final do processo, rememoramos o processo, refletimos sobre as ações desenvolvidas/observadas/analisadas/vivenciadas. A partir daí, se constata onde se chegou, quais objetivos foram atingidos e o que precisa ser revisto, aprimorado.

> As reflexões e conhecimentos sobre a abordagem investigativa são produzidas pelo exercício reflexivo do professor, mediado pelos casos de ensino e subsidiados em experiências, práticas e conhecimentos prévios. Nessa direção, evidencia-se o potencial da ação de formação para a caracterização da abordagem investigativa, num processo formativo com ênfase no exercício do professor reflexivo e na perspectiva do desenvolvimento profissional (Silva, 2018, p. 229).

No momento de avaliar é que o/a professor/a comprova que uma atividade de investigação que aflora a imaginação dos estudantes é, de certa maneira, uma viagem ao desconhecido, e, portanto, terá de decidir quais estratégias seguir, testá-las, validálas e, no decorrer do processo, não desanimarem (nem estudantes nem professor/a) com os primeiros erros ou tentativas que não deram certo.

> Mediante o aceite ao convite, os alunos se colocam em uma atitude de curiosidade, engajam-se no trabalho e o professor não tem como antecipar o que os alunos descobrirão em sua investigação. A autonomia do aluno na escolha dos caminhos da investigação é exercitada de modo partilhado com o professor, este se coloca como questionador e busca conduzir o processo de modo a gerar novas possibilidades de investigação (Silva, 2018, p. 85).

Podemos dizer que desde os primeiros anos da nossa vida escolar nos deparamos com problemas matemáticos, porém, comumente, utilizamos fórmulas para solucionar, ao contrário de nosso cotidiano, pois, mormente, não usamos e nem chegamos perto de fórmulas empregadas na vida acadêmica. Quando as atividades matemáticas são plausíveis ao entendimento, como defendido por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 23), “o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações”.

Portanto, podemos asseverar que é perceptível que o modelo de CI mobiliza ao Protagonismo do estudante diante de uma atividade matemática com Cenários para Investigação, sendo crucial para o seu desenvolvimento intelectual e emocional. Ao assumir um papel ativo na resolução de problemas matemáticos, desenvolve habilidades de pesquisa, criatividade, comunicação e pensamento crítico, promovendo, ainda, interesse e motivação pela Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa é fruto de angústias e de inquietações que permeiam minha passagem pelo Mestrado, responsável por grandes mudanças em minha caminhada profissional. Em um primeiro momento, a euforia de estar iniciando mais uma etapa; depois, os desafios, obstáculos e uma caminhada de aprendizados e construções; a incerteza da definição do tema, a corrida contra o tempo, as disciplinas obrigatórias, enfim, várias etapas vivenciadas e vencidas, todas com forte comprometimento e seriedade. Com esse estudo, pretendo deixar uma contribuição sobre as possibilidades de fazermos uma Matemática nos bancos escolares que coloque os estudantes como Protagonistas do aprender a fazer e aprender a ser, na perspectiva de um Cenário para Investigação, que, nesta dissertação, buscou analisar como os estudantes do Ensino Fundamental estruturam a exploração, as conjecturas e a justificação ao participarem de uma atividade de Investigação Matemática que tematiza a Álgebra por meio de padrões e regularidades.

Nesse viés, cabe enfatizarmos que o Protagonismo dos estudantes não foi o ponto de partida, mas foi o ponto de chegada nesta pesquisa, uma vez que pretende a superação da fragmentação disciplinar do conhecimento, visa estimular a aplicação do conhecimento no cotidiano e demonstra a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende. Assim, comprovamos que os estudantes não são apenas receptores de conteúdos, eles constroem seu próprio conhecimento e, nesse âmbito, o professor exerce a função de mediador. Neste estudo, esse foi o meu papel, mediadora, proporcionando um ambiente propenso a diálogos e opiniões, colaborando com os estudantes, através de incentivos, provocações e feedbacks, na construção da própria aprendizagem.

Ao longo da escrita, em conjunto com minha orientadora, buscamos trazer os objetivos específicos desta pesquisa, que queremos agora revisitar. O primeiro objetivo específico tencionava identificar os principais conceitos e princípios que ancoram a Investigação Matemática no campo teórico. Para responde-lo, desenvolvemos a seção “A Investigação Matemática em Sala de Aula”, nos embasamos em Ponte, Brocardo e Oliveira (2009); Ponte (2022); Alrø e Skovsmose (2006); e Skovsmose (2000, 2014) para discorrer, conceituando e trazendo os princípios basilares da Investigação Matemática e analisando as possibilidades de mobilizá-la nos processos de ensino e aprendizagem da disciplina. Ademais do termo

Investigação Matemática, suas etapas foram relacionadas, quais sejam: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; justificação e avaliação. Também conceituamos Cenários para Investigação, Cooperação Investigativa e Paradigma do Exercício. Nessa seção, defendemos, ainda, que a aprendizagem matemática é mobilizada pelo interesse e pela curiosidade dos estudantes, logo, é primordial que sejam constantemente instigados e desafiados.

Aprofundar conceitos estruturantes da Álgebra e do pensamento algébrico; propor a estruturação de uma aula dedica à realização do trabalho investigativo em Matemática para o ensino de Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico, constituía-se no segundo objetivo específico, cujo alcance apresentamos na seção quatro. Para tanto, fizemos uma conceituação do ensino da Álgebra, bem como uma descrição do que os documentos orientadores nos proporcionam como indicativa de trabalho. Em continuidade, apresentamos situações de atividades aos estudantes, a partir de uma proposta de Investigação Matemática com Ambiente de Aprendizagem envolvendo Cenários para Investigação. Propomos atividades que contemplavam Ambientes de Aprendizagem em três Cenários para Investigação: Referência à Matemática pura (2); Referência à semirrealidade (4) e Referência à realidade (6).

O terceiro objetivo específico programava constatar que discussões matemáticas os estudantes promovem e como elas ocorrem no desenvolvimento das atividades de investigação propostas, em termos de exploração, conjecturas, teses e justificação, e foi desenvolvido na seção 5 – “Episódios Investigativos: um Diálogo com os Estudantes”. Propomos atividades investigativas, em quatro episódios (episódio 1 – Torre De Hanói; episódio 2 – Jogo Pega-Varetas; episódio 3 – situações-problemas do livro didático; e, episódio 4 – situações do cotidiano), que propiciaram aos estudantes dialogar e assumir posturas diante da proposta. As falas aprestadas mostraram os momentos de construção, conjecturas, teses, justificações, hipóteses, como os estudantes estavam engajados. Outrossim, fica perceptível, ao longo do percurso das atividades, a evolução e amadurecimento de ideais, como conseguem formular teses, e reformulá-las, conforme dialogam, assumindo o Protagonismo da construção do conhecimento acerca do tema proposto.

Por seu turno, o quarto objetivo específico almejava observar que conhecimentos, capacidades matemáticas, novas concepções e atitudes em relação à Matemática são evidenciados pelos estudantes, e detectar quais as possibilidades e limitações da proposta apresentada. Foi cumprido na seção 6, denominada

“Movimento Investigativo”, e o será, ainda, nesta conclusão, quando discorrermos acerca das possibilidades e limitações. Tecemos uma análise sobre as categorias emergentes a partir da ATD, apresentando cada uma delas, num movimento ao modelo de Cooperação Investigativa. A categoria “Aceitando o Convite à Exploração: Primeiras Provocações” demonstrou o processo evolutivo dos estudantes-participantes, que, incialmente, buscavam “encontrar” uma resposta rápida e pronta. Sem embargo, aos poucos, entenderam que era preciso construir um caminho, pensar de forma independente, fazer suposições, testá-las, observar padrões e a procurar conexões. Os jogos Torre de Hanói e Varetas possibilitaram a prática de habilidades importantes da Álgebra, como a resolução de equações, a simplificação de expressões e a manipulação de variáveis.

Explicitamos esse objetivo através das categorias de análise. A categoria “Postura Investigativa” inferiu que os estudantes foram desafiados a resolver problemas e construir caminhos em busca de soluções e justificar seus resultados. Ao serem encorajados, estimulados pela professora, desenvolveram habilidades de raciocínio lógico, investigaram padrões e argumentos matemáticos formais para apoiar suas conjecturas, que estão transcritas ao longo da seção. Ainda, foi realizado o movimento de avaliar e analisar as informações coletas durante uma investigação. Esse movimento resultou na subseção “A Cooperação mobilizando Protagonismo dos estudantes”, dado que, ao trabalharem, tanto individual como conjuntamente, na proposta de Investigação Matemática em um Ambiente de Aprendizagem envolvendo os Cenários para Investigação já mencionados no cumprimento do objetivo específico três, os estudantes, a aceitarem o convite à exploração compreenderam que precisavam construir um caminho para encontrar a/s resposta/s, fazendo aflorar sua postura investigativa, uma vez que foram desafiados a buscar uma solução, e para isso, sem ampararam na interpelação “e o que acontece se...”, que os levou a perceberem, pensarem alto, reconhecerem, posicionarem-se, reformularem, avaliarem, reposicionarem-se, emergindo, por conseguinte, o Protagonismo dos estudantes na construção do seu aprendizado.

O desenvolvimento de habilidades de Investigação Matemática e o Protagonismo dos Estudantes na construção do conhecimento matemático são aspectos fundamentais para o ensino e a aprendizagem da disciplina. Quando os estudantes são incentivados a realizar Investigações Matemáticas, têm a oportunidade de explorar conceitos e ideias de forma mais profunda e desenvolver um maior entendimento das estruturas e padrões matemáticos.

Além disso, ao possibilitar que os estudantes assumam o Protagonismo em sua própria aprendizagem, os professores abrem espaço para que eles trabalhem com questões que sejam significativas e relevantes para sua vida, tornando o processo de aprendizagem mais engajador e efetivo. Isso ajuda a desenvolver a autonomia, a criatividade e as habilidades analíticas dos estudantes, preparando-os melhor para a vida adulta e para os desafios do mundo contemporâneo. Em suma, a Investigação Matemática é o aspecto central para uma Educação Matemática de qualidade. Ao oferecer aos estudantes a oportunidade de explorar e construir conhecimentos matemáticos de forma autônoma e reflexiva, os professores contribuem para a formação de cidadãos críticos e capazes de tomar decisões informadas e responsáveis.

Nesse contexto, o aprendizado não é pautado apenas na compreensão da Matemática já feita, esperamos que o estudante seja capaz de fazer uma investigação de natureza matemática, de acordo com cada nível de ensino, pois, assim, poderá perceber o que é a Matemática e qual a sua utilidade na compreensão e intervenção sobre o mundo. O ensino dessa disciplina precisa visar o domínio dos conhecimentos adquiridos, para que seja inundado pela paixão “detetivesca”, imperativa à sua fruição.

No ensino da Matemática não há receitas prontas e próprias para cada situação, exige desafiar e buscar alternativas a cada dia, com significados relevantes. Acreditamos que a escola precisa envolver os estudantes no tema matemático estudado, despertando curiosidade, interesse e comprometimento, necessita caminhar para uma Educação Matemática na perspectiva Crítica.

Entendemos, como uma possibilidade, que está proposta investigativa deve ser parte da formação dos professores, visto que é um caminho fértil entre teoria e prática. Quiçá seja o “empurrãozinho” que está faltando para dar a partida a um embasamento teórico profícuo, duradouro e de muito diálogo com seus pares. O professor de Matemática não pode mais ser aquele profissional que não consegue fazer a interdisciplinaridade em suas aulas. A Matemática não pode andar sozinha, deve caminhar em uma proposta investigativa.

Esperamos que essa pesquisa colabore para um ensino matemático com significados alinhados ao campo investigativo e à construção do ensino de Matemática Crítica. Outrossim, acreditamos que é necessário que avance de forma investigativa nas escolas, é preciso destacar as potencialidades para o ensino e aprendizagem em uma contribuição positiva, é necessário oferecer momentos de aprendizagem que propiciem à troca, o registro, a conjectura de resultados, a articulação de conhecimentos, valorização do caráter científico da disciplina, valorização de seus benefícios, desmistificando a falta de compreensão e interpretação dos desafios que ela apresenta.

Como limitações da pesquisa, dada minha formação e longos anos trabalhando a partir do Paradigma do Exercício, no qual o/a professor/a apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas, exemplos e os alunos resolvem exercícios selecionados geralmente de livros didáticos, além de seguir a premissa que de todas as informações devem ser dadas previamente ou devem estar no enunciado para balizarem a resolução dos exercícios, que apresentam somente uma resposta correta, em alguns momentos, quando percebia que não estavam conseguindo conjecturar, criar teses e formular hipóteses, considerava que precisava auxiliá-los, dando algumas pistas de por onde deveriam “andar”. Contudo, ao romper com o Paradigma do Exercício e caminhar para um caminho investigativo que transforme as aulas de Matemática, nas quais o conhecimento é construído de forma colaborativa, acredito que contribuirei e cada professor que seguir esse caminho também colaborará para um avanço significativo diante de uma proposta de perguntas e não respostas prontas.

Fica a pergunta: “o que acontece com a/o professor/a ao se desafiar em propor Investigação Matemática em sua sala de aula?”, para todos e para mim, enquanto pesquisadora. Nessa esteira, atrevo-me a tentar responder, contando um pouco do que a professora Cecilia vivenciou.

No início, foi ***o namoro*** com o tema “Investigação Matemática” e ***a paixão*** despertada em uma proposta diferente de fazer a prática em sala de aula. Em seguida, ***a união***; precisava estar ligada e fazendo conjecturas com a proposta para ser algo diferente e significativo. Assim, o namoro chegou à fase das ***desilusões***: será que é isso mesmo? Esse é o caminho? Conseguirei desenvolver essa proposta? O que os autores nos mostram sobre? O suporte teórico será suficiente? Irei dar conta de toda a demanda...? E, sim, ***o amor*** com se deu pelo amadurecimento, pelas batalhas, pelos choros desafiadores. O ápice desta caminhada veio do encontro com a prática em uma proposta diante dos estudantes, nos quais espero ter deixado ***marcas*** nesta caminhada.

A paixão pelo tema foi despertada quando pensei que é sim possível fazer diferente, posso contribuir para uma proposta que desperte o interesse dos estudantes. Iniciei a pesquisa com entusiasmo e alegria, objetivando trazer algo relevante. Os estudantes tiveram a possibilidade de estar frente a uma proposta desafiadora, que elucida atividades escolares de maneira prazerosa e dinâmica, com aprendizado e relações significativas no processo. A ***paixão*** pelo tema da Investigação Matemática e os estudantes estão ligados à ideia de empoderamento destes em sua própria aprendizagem. Quando são encorajados a investigar e a explorar conceitos matemáticos por conta própria, tornam-se mais autônomos no processo de aprendizagem e desenvolvem maior interesse pela disciplina. Os professores que são apaixonados pelo tema também encontram prazer em ver seus estudantes construindo conhecimentos e fazendo descobertas por conta própria.

A Matemática é uma disciplina que está em constante evolução e que oferece uma diversidade de possibilidades de estudo e exploração. Ao incentivar a Investigação Matemática, os professores e os estudantes podem estar constantemente descobrindo conceitos e desafios. Ou seja, contemplam, na Investigação Matemática, um espaço de descoberta, desafio e prazer.

Nessa linha, sobreveio o questionamento: como ***unir*** a teoria e a prática? Estou acostumada com o Paradigma do Exercício, sou fruto dele, sempre estive nos bancos escolares fazendo repetições e repetições. Acabai me desafiando nesta proposta, foi primordial, para isso, revisar a teoria, a fim de ter melhor resultado na prática, o que incluiu retomar alguns conceitos matemáticos, como fração, números decimais, decomposição, conceitos de expressões algébricas, entre outras regras matemáticas importantes. Parti para a apresentação do problema a ser investigado, exemplos práticos, diálogo sobre este com os estudantes, a discussão de possíveis soluções e estratégias e, finalmente, o compartilhamento das propostas estabelecidas por eles. Desta maneira é possível abrir caminhos para que os estudantes descubram a teoria por conta própria, ao invés de o professor apenas a explicar, tornando a atividade de Investigação Matemática envolvente, desafiadora e evidente. Ao unir a teoria e a prática, os estudantes ficam motivados e compreendem melhor os conteúdos propostos.

Assim como em um namoro, as ***desilusões***, as inquietações e os desafios com o novo nos amedrontam: será que darei conta? É isso mesmo? É isso que o Estado do Conhecimento nos diz? Será um trabalho inédito? É utópico pensar em uma proposta na qual o estudante será o Protagonista do saber e o professor conseguirá atuar somente como mediador? Como os estudantes reagirão diante de uma proposta que os torna agentes do saber?

O amor veio com a prática. Quando experienciei as teorias e as propostas em uma perspectiva diálogo que mobiliza o Protagonismo do estudante, foi possível perceber o despertar dos estudantes pelo gosto do ensino da Matemática, ver a beleza que isso apresenta. Com isso, comprovamos, nas falas, quando conseguem realizar as propostas apresentadas, que são construções diárias que precisam fazer parte do planejamento do professor. À medida que os encontros passavam, veio a segurança e confiança no que estava sendo propondo, tornava-se visível a autoconfiança que os estudantes foram construindo e demonstrando; consoante avançavam, percebia que o meu papel não era mais o de responder, mas de questionar os fatos apresentados.

Deixei ***marcas*** quando percebi a metamorfose do saber; ao ouvir a seguinte fala: *"Poderia ter mais didática, eu acho melhor aprender sobre as aulas de Matemática" (E1).* Na verdade, a intenção do estudante era dizer que poderíamos *fazer diferente*. E nós podemos fazer diferente. Posso afirmar que fiz diferente. Mesmo que tenha sido em um curto intervalo de tempo, quando de volta à escola, conversei com o estudante, e ele pediu: "*profe, será que aquela profe não poderia dar mais umas aulas pra nós, foi muito legal"*.

Portanto, todo o processo de desenvolvimento dessa dissertação, a Investigação Matemática proposta e seus desdobramentos culminaram na comprovação de que trabalhar a Investigação Matemática com Ambiente de Aprendizagem envolvendo Cenários para Investigação propicia o brotar do Protagonismo do estudante.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, Silas Senhorinha de. **O uso da investigação Matemática na aprendizagem de equação do primeiro grau no 7º ano**. 2019. 131 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Acre, Rio Branco/AC, 2019. Disponível em: http://www2.ufac.br/mpecim/menu/dissertacoes/turmar-2017/dissertacao-silas-senhorinha-de-alencar.pdf. Acesso em: 20 dez. 2021.

ALRØ, Helle; OLE, Skvosmose. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Tradução de Orlando Figueiredo. 2. ed. Belo Horizonte/MG: Editora Autêntica, 2010.

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação Matemática**. Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte/MG: Editora Autêntica, 2006.

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Dialogue and learning in mathematics education**: intention, reflection, critique. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2004.

ASSIS, João Matheus Santos. **Caminhos reais no plano ensino e aprendizagem dentro do encantado mundo dos números complexos**. 2022. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus/BA, 2022.

AVI, Emanueli Bandeira. **Aprendizagens Matemáticas desenvolvidas em ambiente de investigação estatística**. 2012. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí/RS, 2012.

AZEVEDO, Mara Oliveira de. **Atividades investigativas com foco em Equações do 2º grau**: possibilidades e limitações dos alunos do 9° ano do Ensino Fundamental. 2019. Dissertação (Mestrado em Mestrado em Ensino) – Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social, Lajeado/RS, 2019.

BACCARIN, Sandra Aparecida de Oliveira. **Investigação Matemática**: uma análise da sua contribuição na construção de conceitos algébricos. 2008. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília/DF, 2008. Disponível em: https://repositorio.unb.br/handle/10482/6188. Acesso em: 18 dez. 2021.

BALKE, Marlova Elizabete. **Investigação Matemática**: tratamento da informação no Ensino Fundamental. 2011. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo/RS, 2011. Disponível em: https://secure.upf.br/pdf/2011MarlovaElizabeteBalke.pdf. Acesso em: 10 dez. 2021.

BECHARA, Evanildo. **Dicionário da língua portuguesa Evanildo Bechara**. Rio de Janeiro/RJ: Nova Fronteira, 2011.

BEZERRA, Odenise Maria. **Investigação histórica nas aulas de Matemática**: avaliação de duas experiências. 2008. 124 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal/RN, 2008. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/16041. Acesso em: 4 dez. 2021.

BIANCHINI, Barbara Lutaif; LIMA, Gabriel Loureiro de. A Álgebra e seu papel: reflexões a partir das produções do GT 04 da SBEM. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 70, p. 981-999, 2021. DOI 10.1590/1980-4415v35n70a19. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/gQsqHTDMbrWXJLHcZd7X3gs/?format=pdf. Acesso em: 14 set. 2023.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília/DF: Ministério da Educação, 2017.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília/DF: Secretaria de Educação Fundamental (MEC/SEF), 1998.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília/DF: Secretaria de Educação Fundamental (MEC/SEF), 1997a. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf. Acesso em: 16 dez. 2021.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília/DF: Secretaria de Educação Fundamental (MEC/SEF), 1997b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 20 fev. 2022.

BRASIL. Resolução n. 466, de 12 de dezembro de 2012. Aprova as seguintes diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, DF, n. 12, p. 59, 13 jun. 2013. Disponível em: http://bvsms.saude.gov.br/bvs/saudelegis/cns/2013/res0466_12_12_2012.html. Acesso em: 19 jun. 2022.

BRAUMANN, Carlos. Divagações sobre investigação Matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. *In*: PONTE, João Pedro da *et al*. (org.). **Atividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Lisboa/Portugal: SEM-SPCE, 2002. p. 5-24. Disponível em: http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2002.pdf. Acesso em: 20 fev. 2022.

CAMPEÃO, Vagner. **Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental**: uma proposta de aplicativo. 2020. 52 f. Dissertação (Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina/PR, 2020. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000231495. Acesso em: 12 out. 2021.

CAMPOS, Rodrigo Ruiz. **Argumentação e demonstração em alunos do ensino médio**: uma proposta de investigação Matemática sobre crescimento e decrescimento de funções afins. 2018. 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional em

Ensino de Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo/SP, 2018. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-13062018-213641/publico/CAMPOS_R_R.pdf. Acesso em: 13 set. 2021.

COELHO, Flávio Ulhoa; AGUIAR, Marcia. A história da Álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Revista Estudos Avançados**, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 171-186, 2018. DOI 10.1590/s0103-40142018.3294.0013. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ea/a/6KryLd3HngCnBwJtWFHxSHj/?lang=pt&format=pdf. Acesso em: 20 fev. 2023.

CONSELHO NACIONAL DE SAÚDE. Resolução nº 510, de 07 de abril de 2016. Dispõe sobre as normas aplicáveis a pesquisas em Ciências Humanas e Sociais. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, DF, n. 98, p. 44-46, 24 maio. 2016.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **EtnoMatemática**: Elo entre as Tradições e a modernidade. Belo Horizonte/MG: Autêntica, 2001.

EICHENBERGER NETO, João. **História da Matemática**. Londrina/PR: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016. Disponível em: https://docplayer.com.br/156643489-Kls-historia-da-matematica-joao-eichenberger-neto-historia-da-matematica.html. Acesso em: 20 mar. 2023.

EXPLORAÇÃO. *In*: DICIONÁRIO Online de português. 2023. Disponível em: https://www.dicio.com.br/exploracao/. Acesso em: 14 set. 2023.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários a pratica educativa. 9. ed. São Paulo/SP: Paz e Terra, 1997.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos e pesquisa**. 3. ed. São Paulo/SP: Editora Atlas, 1995.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos e pesquisa**. 4. ed. São Paulo/SP: Editora Atlas, 2002.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito. **A Conquista da Matemática**: 7º ano, ensino fundamental, anos finais. 4. ed. São Paulo/SP: FTD, 2018.

GONICK, Larry. **Álgebra em quadrinhos**. Tradução de Helena Castro. São Paulo/SP: Blucher, 2017.

KLUTH, Verilda Speridião. Uma visão filosófica do pensar algébrico. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2019, Recife. **Anais […]** Recife: SBEM, 2004. p. 1-14.

KREFTA, Silvana Teresinha; TREVISAN, Eberson Paulo; TREVISAN, Andreia Cristina Rodrigues. Cenários para investigação e os livros didáticos: um olhar para as pesquisas realizadas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 12, n. 28, p. 361-385, 2023. DOI: 10.33871/22385800.2023.12.28.361-385.

LAMONATO, Maiza; PASSOS, Carmem Lúcia Brancaglion. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação Matemática: reflexões para o ensino de Matemática. **Revista Zetetiké**, Campinas/SP, v. 19, n. 36, p. 51-74, jul./dez. 2011. Disponível em. http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/mydownloads_01/visit.php?cid=46&lid=7036. Acesso em: 28 fev. 2022.

MACCALI, Ludmila. **Atividades investigativas para o ensino da Álgebra em turmas de 7° ano e 9° ano do Ensino Fundamental**. 2017. 116 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social, Lajeado/RS, 2017. Disponível em: https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/1713/1/2017LudmilaMaccali.pdf. Acesso em: 20 fez. 2022.

MACHADO, Viviane Menezes de Souza. **Atividades investigativas na resolução de equações do 1º grau, por alunos do sétimo ano**. 2019. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Acre, Rio Branco/AC, 2019.

MARIANI, Mateus. **Cartografia e investigação Matemática**: possibilidades para uma intervenção pedagógica com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. 2018. 93 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social, Lajeado/RS, 2018. Disponível em: https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/2189/1/2017MateusMariani.pdf. Acesso em: 20 mar. 2022.

MEINERZ, Franciele Marciane. **Resolução de Equações do 1º grau com uma incógnita por meio do uso do material *Algebra Tiles***. 2020. 159 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/RS, 2020. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/220342. Acesso em: 18 jan. 2022.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.). **Pesquisa Social**: Teoria, método e criatividade. 21. ed. Petrópolis/RJ: Vozes, 2002.

MORAES, Roque. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003. DOU 10.1590/S1516-73132003000200004.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. Análise textual discursiva: processo reconstrutivo de muitas faces. **Revista Ciência & Educação**, Bauru/SP, v. 12, n. 1, p. 117-128, 2006. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/wvLhSxkz3JRgv3mcXHBWSXB/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 19 jun. 2022.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise textual discursiva**. 3. ed. Ijuí/RS: Editora Unijuí, 2016.

MORAN, José. **Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda**. 2013. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/metodologias_moran1.pdf. Acesso em: 14 set. 2023.

MOROSINI, Marília Costa; FERNANDES, Cleoni Maria Barboza. Estado do Conhecimento: conceitos, finalidades e interlocuções. **Revista Educação por escrito**, Porto Alegre/RS, v. 5, n. 2, p. 154-164, jul./dez. 2014. Disponível em: https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/porescrito/article/view/18875. Acesso em: 19 jun. 2022.

NAZARIO, Murilo Eduardo dos Santos; SANTOS, Wagner dos; FERREIRA NETO, Amarílio. Protagonismo juvenil no ensino médio: reflexões acerca da elaboração e implementação dos jogos interclasses. **Revista Pro-Posições**, Campinas/SP, v. 34, p. 1-32, 2023. DOI 10.1590/1980-6248-2021-0132. Disponível em: https://www.scielo.br/j/pp/a/LX7xMsqVx6LbPrtK8RbHXqC/?lang=pt&format=pdf. Acesso em: 13 out. 2023.

PONTE, João Pedro da *et al*. Investigações e explorações como parte do trabalho quotidiano na sala de aula. **Amazônia Revista de Educação em Ciências e Matemática**, Belém/PA, v. 9, n. 18, p. 5-22, jan./jun. 2013. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/2019. Acesso em: 19 jun. 2022.

PONTE, João Pedro da. Investigar, ensinar e aprender. *In*: PROFMAT, 2003, Lisboa/Portugal. **Actas: [...].** Lisboa/Portugal: APM, 2003, p. 25-39.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Material de Apoio do Ensino Básico. Lisboa/Portugal: Repositório ULisboa, 2009. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf. Acesso em: 29 abr. 2022.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Helia. **Investigação Matemática na sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte/MG: Autêntica, 2009.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte/MG: Autêntica, 2003.

REGINALDO, Bruna Karla Silva. **Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de Matemática**. 2012. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte/MG, 2012. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/BUOS-8ZLPQB/1/dissertacaofinal_bruna.pdf. Acesso em: 30 abr. 2022.

RIO GRANDE DO SUL. **Matrizes de referência 2023, Educação Infantil e Ensino Fundamental foram os temas da Jornada Pedagógica desta quarta (15)**. Porto Alegre/RS: Secretaria da Educação, fev. 2023. Disponível em: https://educacao.rs.gov.br/nova-bncc-itinerarios-do-ensino-medio-gaucho-e-matriz-curricular-foram-os-temas-do-terceiro-dia-da-jornada-pedagogica. Acesso em: 20 mar. 2023.

SANTOS, Osmair Carlos dos. **Do ensino tradicional à iniciação a atividades de investigação Matemática**: desconstruindo velhos hábitos. 2018. 107 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia/GO, 2018. Disponível em: http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/9261. Acesso em: 20 dez. 2021.

SCHMITT, Fernanda Eloisa. **Abordando geometria por meio da investigação Matemática**: um comparativo entre o 5º e 9º anos do Ensino Fundamental. 2015. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário Univates, Lajeado/RS, 2015. Disponível em: https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/831/1/2015FernandaEloisaSchmitt.pdf. Acesso em: 28 fev. 2022.

SILVA, Denise Knorst da. **Uma ação de formação de professores na e para uma abordagem investigativa em aulas de Matemática**. 2018. 314 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis/SC, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/206097. Acesso em: 13 out. 2023.

SILVA, Denise Knorst; COSTA, David A. Abordagem investigativa em aulas de Matemática: uma investigação com casos de ensino na formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 1, p. 160-179, 2019. DOI 10.23925/1983-3156.2019v21i1p160-179.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. O que é Álgebra? **Brasil Escola**, 30 abr. 2016. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-algebra.htm. Acesso em: 31 out. 2022.

SILVA, Márcia Cristina Araújo Lustosa; CRUZ, Valmira Maria de Amariz Coelho; SILVA Frederico Fonseca da. A aprendizagem significativa uma interface com protagonismo juvenil: numa perspectiva socioafetiva. **Revista Psicopedagogia**, São Paulo, n. 30, v. 91, p. 12-20, 2013. Disponível em: http://pepsic.bvsalud.org/pdf/psicoped/v30n91/03.pdf. Acesso em: 13 out. 2023.

SKOVSMOSE, Ole. **An invitation to critical mathematics education**. Rotterdam: Sense Publishers, 2011.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. Tradução de Jonei Cerqueira Barbosa. **Revista Bolema**, Rio Claro/SP, v. 13, n. 14, p. 1-24, 2000. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022. Acesso em: 28 fev. 2022.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios e reflexão em educação matemática crítica**. Campinas/SP: Papirus, 2008.

SKOVSMOSE, Ole. **Um convite à educação Matemática Crítica**. Campinas/SP: Papirus, 2014.

SOARES, Eduardo Sarquis. **Ensinar Matemática**: desafios e possibilidades. Belo Horizonte: Dimensão, 2009.

SOUZA, Leandro Caciolato de. **A comunicação em investigação matemática**. 2021. 140 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina/PR, 2021.

WICHNOSKI, Paulo. Uma entrevista com João Pedro da Ponte sobre a investigação Matemática na educação Matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão/PR, v. 11, n. 24, p. 08-14, jan./abr. 2022. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6734. Acesso em: 05 jul. 2022.

ZEGARELLI, Mark. **1001 problemas de Matemática básica e pré-Álgebra para leigos**. Tradução de Paula Rigaud. Rio de Janeiro/RJ: Alta Books Editora, 2016.

APÊNDICES A – Elaboração das unidades de falas

EPISÓDIOS CATEGORIAS EMERGENTES: ACEITANDO O CONVITE À EXPLORAÇÃO: PRIMEIRAS PROVOCAÇÕES. CATEGORIA: POSTURA INVESTIGATIVA

EPISÓDIO 1
E1: A gente não pensa não... isso pode mover um. Depois passa para. Esquece.... Eu já vi esse tipo. Reinicia verde em cima da marrom rosa em cima da... Sim, está bom. Mas a gente não. Eu posso. Eu posso colocar o verde em cima do rosa. E5: Um de cada vez, uma em cada um, daí, não é? Só um de cada um de cada vez, né? Essa regra não é sim? E4: Aham, você não pode ser em cima complicado tá? ... Um vai ..., vai, tira, vai tirando bota aí, tira. E1: Eu estou mudando de cabeça, ... E4: Foi mal isso, medrosa. Agora eu preciso de novo. Quase em cima de ... Aí bota, tira. Ninguém aqui dá certo. Eu queria... Não, daqui a pouco vai acabar. Não sei. E tira isso aqui, um. É isso aqui. Certo, muito ..., é quase nervoso. Está aí. Porque que o rosa está dando problema? ... E4: Deixa-me terminar, então. Deixa mais um tempo. Isso é um ciclo sem fim, não se acaba. Então, agora não sei onde vai pequeno, acho que vai... E3: Não entendi nada. E4: Eu acho que é impossível. E5: Um de cada vez, uma em cada um, daí, não é? Só um de cada um de cada vez, né? E4: Agora tem que transferir tudo isso aqui com vermelho. Se desse pra colocar assim? E1: Quantos movimentos deu? Eu não contei, quais são as regras do jogo? E1: Quando nós tivermos uma pecinha. O mínimo de movimentos, o mínimo né? É o mínimo? Pode dar mais? Quando tinha duas pecinhas o mínimo de movimentos? Três? E2: Imagina 64 pecinhas? Como eles fizeram? E se nós começar assim? O dobro de três é seis mais um é sete. O dobro e o dobro de quatro? E2: Alguns números primos? Todos os resultados são primos? E2: 17105. Pra não ficar fazendo todos os cálculos? Como descobrir? Como fazer? E5: Profe não tem um jeito mais fácil? E2: Profe, esses são os movimentos mínimos né, eles poderiam ter feito mais? Né? E6: Quanto mais vai montando, vai modificando, tipo, o número de peças. E: Três movimentos com 2 peças. E2: É engraçado, meu muito. E1: A gente não pensa não... isso pode mover um. Depois passa para. Esquece.... Eu já vi esse tipo. Reinicia verde em cima da marrom rosa em cima da... Sim, está bom. Mas a gente não. Eu posso. Eu posso colocar o verde em cima do rosa. E1: Tá bugado o cérebro. E5: A gente não pensa, né? ... assim pode. Onde ... passa rápido pra cá, essa aqui, essa. Espera aí é que eu fiquei aqui, né? Fica o azul... bota aqui. E5: Ai, Laura, pra cá. Ah trocam, raciocinou Duda. Não, não, não. Tá bom, vai lá. E1: Gente, eu gostei. Pensativo é cansativo, sabe? Pensa só um pouquinho. Não, não um... Rosa, Vem Pra Cá. E4: Deixa eu terminar, então. Deixa mais um tempo. Isso é um ciclo sem fim, se não se acaba. Então, agora não sei onde vai pequeno, acho que vai... E6: Já agora que eu não sei explicar. A quantidade de peças influência nos movimentos. Eduarda: Entendi o número de peça influência nos movimentos. E: Alguém entendeu? É, deu 120 alguma coisa, né? Contei as últimas 7, 20 e 20. E4: Eu acho que é impossível. E6: Meus neurônios não consigo contar com gente falando. E1: Profe eles ficaram dias jogando. E4: Aí o que aconteceu? Difícil. Vamos aí.

E6: Já agora que eu não sei explicar. A quantidade de peças influência nos movimentos. E1: Entendi o número de peça influência nos movimentos. E6/E2: A quantidade de peças influenciando os movimentos. Aqui é Álgebra, Matemática. É Álgebra, é Matemática, Álgebra tem Álgebra junto, né? E2: Imagina 64 pecinhas? Como eles fizeram? E se nós começar assim? O dobro de três, é seis mais um é sete. O dobro e o dobro de quatro? E5: Não, o dobro. É oito mais um. Não dá quinze. E2: Ah não, eu entendi na sequência do outro lado. E2: O dobro mais um não deu certo... E1: Todos os números são impares. E2: Alguns números primos? Todos os resultados são primos. Quinze é primo. E2: Acho que não. Porque o 1 não é primo nem composto. E2: Estou fazendo uns cálculos aqui: 3+3=6+1=7, 7+7=14+1=15, 15+15=30+1=31, 31+31=62+1=63, 63+63=126+1=127, 27+127=254+1=255, 255+255=510+1=511. E5: Trinta e sete. Trinta e um, trinta e um, é o mínimo. E1: Eu fiz. Aí eu fiz alguma coisa errada. E2: Oitenta e nove meu, deu pra mim. Cento e noventa e cinco. Noventa e seis. Não, daí eu fiz alguma coisa errada, com certeza. E1: Cento e vinte e sete. E4: 19904. E2:64-9=55x 311= que deu um número ímpar=17105. 9-3=6 x 7=42 Não deu certo, essa teoria também. 4 x 1=4 -1=3.
E1, a: Tá bugado o cérebro. E4, a: Tem que desmanchar tudo de novo, pra pôr o verde embaixo? E4, a: Só falta ter letras negativas. E2, a: Ninguém para mexer. Não pode, não é a regra. Qual que era a regra? A gente tem que inverter, porque o azul é o primeiro. Esse daqui é o primeiro. E2, a: A letra não muda nada, o que muda é os números. Não muda a conta. Pode ser negativo, ou não. E1, a: Pressão, glicose, temperatura, vitamina D. E4, a: Não pode deixar que falte nenhum espaço. E6, a: Não precisa. Botar rosa primeiro, tem que mover, marrom primeiro embaixo de rosa certo? Estou arrumando não.... É, eu acho que eu tive uma ideia, eu acho. A gente tira o marrom. Põe o rosa, aí. É raciocínio. E6/E2, a: E a quantidade de peças influenciando os movimentos. Aqui é Álgebra, Matemática. É Álgebra, é Matemática, Álgebra tem Álgebra junto, né? E4, a: Uma de cada vez, não pode colocar uma maior em cima de uma menor. E5, a: Poe o azul aqui em cima... Não dá para botar assim, se não ficar errado. Mas agora. E 3, a: Tira esse aqui, esse aqui vem pra cá, ó. ...embaixo do laranja, fazendo agora, é possível. Aham. Ai meu Deus, agora ... Quando a gente pensa que está acabando, a gente é se complica mais antes de veio aqui. Aqui vem aqui. E6, a: Quanto mais vai montando, vai modificando, tipo, o número de peças. E 2, a: Pera aí, que aí vai um de cada vez. Uma de cada vez, oh, tem que ser esse aqui. Laura, isso tem que ser aqui. Espera, tem que ser. E6, a: O seguinte, este faço verde para cá, aí. Ai, ai, ai. A gente tem que colocar aqui. Como é que eu vou colocar o rosa? Não vou colocar assim também. Pode, é? Não sei... Então tá. E1, a: Quantos movimentos deu? Eu não contei, quais são as regras do jogo?

EPISÓDIO 2
E 1: Eu tô com uma vareta preta. A preta vale cinquenta. E 2: A preta vale de cinquenta. Cada vareta tem um valor. ... E 1: Obrigada meu Deus do céu, qual que vale mais depois da preta? E 2: Eu acho que é amarelo. ... E 2: Murilo tem que separar eu tenho dez.

E 4: Muda nada, tem que ser pelos pontos, tem que separar primeiro
...
E 2: Um, dois, três, cinco... Eu tenho cinquenta
10.a +5. b+ 15.c + 20.d +50.e
102 +5.3+ 15.1 =50
Eu tenho cinquenta.

E4, b: Eu não sei fazer as contas de Álgebra.
E4, b: Eu não estou entendendo nada, eu estou entendendo um pouco.
E5, b: Profe não tem um jeito mais fácil? será que é 2 no expoente -?
E6, b: Torre de Hanói e a Matemática, entendi que: X número de peças igual a X número de movimentos, né!
E2, b: Imagina 64 pecinhas? Como eles fizeram? E se nós começar assim? O dobro de três é seis mais um é sete. O dobro e o dobro de quatro? Alguém tem que contar.
E2, b: Porque o 1 não é primo nem composto, então não pode ser.
E3, b :Se nós pegarmos 2 ao quadrado dá 4, três ao quadrado da 9, se eu pegar 2 no expoente 3 dá 8, se eu pegar 2 no expoente 4, dá 16. Então só potência não serve, então vamos ter que fazer + alguma coisa ou menos alguma coisa. 76.4 no expoente 3 dá 31? O N é o expoente? E o M é o que? O que é a base?
E1, b: Cento e cinco de novo. Cento e cinco. As vermelhas valem dez, né? Sim. E essas dois valem vinte e cinco.
E 2, b: Isso é Álgebra, quando misturamos letras, números. Agora vamos jogar varetas? Tem que tirar todos e não pode mexer as outras.
E5, b: Tira esse aqui, esse aqui vem para cá, ó. ...embaixo do laranja, fazendo agora, é possível. Aham. Ai meu Deus, agora ... Quando a gente pensa que está acabando, a gente é se complica mais.
E 4, b: Tem que desmanchar tudo de novo, pra. Pra pôr o verde embaixo?
E 2, b: Pera aí, que aí vai um de cada vez. Uma de cada vez, oh, tem que ser esse aqui. Laura, isso tem que ser aqui. Espera, tem que ser. É.
E2, b: Meu Deus do céu. É melhor ficar tentando.
E2, b: Alguma coisa aí que eu não estou? Não. Estou fazendo certo. 24 vocês já estavam? Sim, se não se perderam. Ter que ver agora, agora, agora.

EPISÓDIO 3

E 6: Tinham os professores que pediam, assim: Ah eu tenho quinze maçãs e comprei mais trinta e duas, dei nove pra Joãozinho e Maria. Quantas maçãs eu fiquei? Aí tem que fazer. Eu fiquei com trinta.... A resposta também.
E2: O número de prateleiras, que é o cinco e o tamanho das prateleiras, que é o 3m. Duas laterais por 4 metros. As laterais é o número. Vai dar 23 Metros quadrados.

E 2, c: Profe então agora tem que fazer dois virgula quatro menos sete e o resultado divide por cinco?
E2, c: Tem que ler, tem que entender tem que resolver. Matemática e leitura.
E1, c: Já tenho uma estratégia que vai passar demais.
E 2, c: Não é oito vezes seis que dá quarenta e oito? E daí a gente tem que botar uma vírgula, daí vai sobrar, agora vírgula... Dois, que dá dezesseis. Quatro. Já. Agora.

Unidades de fala-EPISÓDIO 4

E6: Nas notas música, na melodia, na letra.
E6: Tem que ter um tempo, né? Murmúrios... E até a duração de cada uma delas, tem um compasso, não pode sair batendo.
E: Geralmente se comprar à vista tem diferença, porque ganha desconto.
E6: Fazer Miojo.
E4: Comida.
E: Tem que pôr os ingredientes na ordem certa, senão pôr a quantidade certa dá errada a receita. E no final dependendo tem que é, assar ou pôr na panela na temperatura certa senão queima.
E2: Eu já tenho que chegar em casa e carregar. Aí precisa de um tempo, é Matemática. O jogo no celular.
E: Eu jogo muito no celular. Profe: Tá. Não tem um tempo pra baixar esse aplicativo?
E6: Precisa baixar um aplicativo pra jogar e isso depende muito do quanto precisa dos MB.
E6/E2: Quanto mais MB, mais...

E6: É a quantidade de espaço. Tem o Kbyte, o Gigabyte, o Megabyte. O Megabyte e o Gigabyte. O jogo que eu falei, ele está uns 735 GB. E3: A gente tem que apagar todos os aplicativos privados. E4:Eu instalei dois jogos... E6: Tem sim. Lógico, o batimento cardíaco, E1: Pressão, glicose, temperatura, vitamina D. E2: Sim, índices de água? E: Matemática. Português. E: Tem que ler. E4: Tem que ler, tem que entender tem que resolver. E6: Profe não vai dar pra gastar exatamente cem reais, senão fico devendo noventa e cinco centavos. E3: Não dá pra comprar muitas vezes o mesmo produto? E2: Profe acrescentei aqui na minha conta quatro borrachas das cinco que eu já tinha E6: Acho que iam umas coisas em uma, umas coisas em outra. E1: Ajuda muito. E6: Sim, a qualidade, a marca, Influencia. Influencia quanto que ele vai... E2: Se vai durar, quanto vai ser útil. E2: Influencia o preço também. E6: O meu faltou umas 5 coisas, não tem tudo na mesma livraria. E2: É possível. E6: Com certeza, se tiver dinheiro. E2: É, se tiver dinheiro. E4: Só me senti um pouco abalado porque comprei as coisas que não era pra comprar. E2: É fácil, é estranho. E3: Mais do que o BBB, não. E1: Um pouco. Foi estranho. E4: Só a torre de Hanói foi um pouco mais difícil. E6: A torre de Hanói foi estressante. A gente acabou perdendo umas contas. E1: Fração. E3: Fração, com letra. E6: Eu gosto de fração. E4: É o melhor número decimal. E1: Eu não gosto de número decimal. Eu odeio número decimal. E4: Não, decimal de racional com vírgula. E1: Poderia ter mais didática, eu acho melhor aprender. E6: Tipo, quando a gente está jogando um jogo, a gente consegue aprender melhor. A gente podia jogar esse jogo aqui. E1: Gente, eu gostei. Pensativo é cansativo, sabe? Pensa só um pouquinho. Não, não um... Rosa, Vem Pra Cá.
E6, d: Não resolvendo. Pensando. Chorando, pensando. As vezes tem coisa que não tem solução. E6, d: Por dois, multiplica por dois..., isso é uma expressão? E5, d: Um copo de leite. Um copo de leite. Coisas. Organizar as coisas. Medidas. Dívidas. É o que? (...falando sobre o uso da Matemática). E2 d: Eu escolheria o primeiro que é cheio de coisa. O meu resultado eu fiz mais ou menos tentando botar o material para que pra mim faltava, e deu certo.

ANEXOS A – Matriz de referência RS/2023

Área de Conhecimento: Matemática /BNCC-Matriz de Referência -RS/2023		
Álgebra no Ensino Fundamental - Anos Iniciais		
	Habilidades	**Objeto de conhecimento**
1º Ano	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de tributos, tais como cor, forma e medida. (EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras. (EF01MA10RS-2) Observar e explorar sequências numéricas ou geométricas percebendo e expressando sua regularidade e conhecendo a ideia de igualdade entre diferentes conjuntos ou sequências.	Padrões figurais e numéricos: Investigação de regularidades ou padrões em sequências. Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).
2º Ano	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem Construção de sequências repetitivas e crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida. (EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas. Identificação de regularidade e sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.
3º Ano	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes. (EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença. (EF03MA11RS-1) Observar, explorar e compreender as ideias de equivalência na igualdade (2+3=5, então 5=2+3) e igualdade das diferenças ou somas (20 - 10 = 10 e 40 - 30 = 10; então 20 - 10 = 40 - 30; da mesma forma para a adição) aplicando-as em situações diversas com ou sem apoio de material manipulável.	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas. Relação de igualdade.
4º Ano	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural. (EF04MA11RS-1) Interpretar e avaliar sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural, identificando sua regularidade.	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural. Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser

	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades. (EF04MA12RS-1) Observar e explorar, por meio de investigações e com apoio de material manipulável, características de diferentes grupos de números naturais percebendo regularidades existentes relacionadas à divisão. (EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas. (EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. (EF04MA14RS-1) Observar e argumentar, em diferentes situações de cálculos e na resolução de problemas, o significado de igualdade, ou seja, equivalência existente entre dois termos quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. (EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.	divididos por um mesmo número natural diferente de zero. Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão. Propriedades da igualdade.
5º Ano	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (EF05MA10RS-1) Investigar, interpretar e sistematizar conclusões que uma igualdade não se altera ao adicionar ou subtrair, multiplicar ou dividir os seus termos por um mesmo número, através de problemas e tecnologias digitais. (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença Matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido. (EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.	Propriedades da igualdade e noção de equivalência. Propriedades da igualdade e noção de equivalência. Grandezas diretamente proporcionais. Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.

	(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.	
Álgebra no Ensino Fundamental - Anos Finais		
	Habilidades	**Objeto de conhecimento**
6º Ano	(EF06MA15RS-2) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, razão entre as partes ou uma das partes e o todo, argumentando os resultados.	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.
7º Ano	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. (EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes. (EF07MA17RS-2) Reconhecer, identificar e interpretar o significado da variação de proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas, expressando corretamente os termos da proporção, através da sentença algébrica. (EF07MA17RS-3) Raciocinar, resolver e socializar problemas envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais, usando o cálculo mental, a sentença algébrica e a propriedade fundamental das proporções. (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade. (EF07MA18RS-1) Identificar e reconhecer a importância da utilização das expressões algébricas e o significado das incógnitas para representar situações reais. (EF07MA18RS-2) Descrever e solucionar problemas em linguagem algébrica, representados por equações polinomiais de 1º grau, fazendo uso das propriedades da igualdade. (EF07MA18RS-3) Reconhecer e utilizar estratégias e procedimentos de resolução de problemas que envolvem equações de 1º grau, bem como analisar, interpretar e validar o resultado obtido, no contexto do problema.	Linguagem algébrica: variável e incógnita. Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. Equações polinomiais do 1º grau.

	(EF07MA18RS-4) Explorar e compreender as igualdades Matemáticas para resolver problemas envolvendo equações de 1º grau com o termo desconhecido nos dois membros.	
8º Ano	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações. (EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano. (EF08MA07RS-1) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano, viabilizando comparações gráficas, com e sem uso de tecnologias digitais. (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. (EF08MA08RS-1) Resolver e elaborar e interpretar problemas relacionados a perímetros e áreas de figuras geométrica que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, utilizando como recursos o plano cartesiano e as tecnologias digitais. (EF08MA08RS-2) Discutir, resolver e apresentar diferentes soluções algébricas, referentes a um sistema de equações lineares com duas incógnitas. (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. (EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas. (EF08MA13RS-1) Resolver, elaborar e socializar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas, com uso ou não de tecnologias digitais.	Valor numérico de expressões algébricas. Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano. Sistema de equações polinomiais de1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano. Equação polinomial de 2ºgrau do tipo $ax^2 = b$. Sequências recursivas e não recursivas. Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

9º Ano	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. (EF09MA06RS-1) Analisar funções e seus respectivos gráficos, quanto às relações entre crescimento, decrescimento e o coeficiente da variação, bem como a interpretação dos resultados no contexto do problema. (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica. (EF09MA07RS-1) Resolver, elaborar e socializar problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes como: velocidade, densidade demográfica, massa corporal, custo, produção, juro e outros. (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas. (EF09MA08RS-1) Representar a variação de duas grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação. (EF09MA08RS-2) Solucionar problemas que envolvam relações de propriedades entre duas grandezas, como velocidade, escalas e densidade demográfica. (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau. (EF09MA09RS-1) Identificar, interpretar e fatorar expressões algébricas valendo-se dos diferentes casos dos produtos notáveis. (EF09MA09RS-2) Resolver equações de 2° grau utilizando-se de diferentes estratégias, inclusive o uso da fórmula resolutiva. (EF09MA09RS-3) Modelar, resolver e elaborar problemas de situações contextualizadas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau, discutindo o significado das soluções.	Funções: e representações numérica, algébrica e gráfica. Razão entre grandezas de espécies diferentes. Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. Expressões algébricas: Fatoração e produtos notáveis. Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações.